INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVII. BAND ZWEITES HEFT 1959

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 27. April 1959

Postverlagsort Berlin

Preis DM 10,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus**. Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Meyer zur Capellen, W., Die Beschleunigungsänderung. II. Mitteilung. Mit 13 Abbildungen 73

Mitterlehner, G., Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen. Mit 8 Abbildungen 88

Bogunović, V., Der durchlaufende Balken auf äquidistanten elastischen Stützen. Mit 8 Abbildungen 104

Wittmeyer, H., Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben veränderlicher Dicke 113

Wittmeyer, H., Biegeeigenfrequenzen eines gelenkig gelagerten Balkens. Mit 1 Abbildung 117

Engl, W., Weiterführung der *Sobrero*schen Theorie des ebenen Spannungszustandes. Mit 4 Abbildungen 128

Zehnter Internationaler Kongreß für Angewandte Mechanik

Der Zehnte Internationale Kongreß für Angewandte Mechanik wird im Kongreßgebäude von **Stresa** (Lago Maggiore, Italien) in der Zeit **von Mittwoch, 31. August bis Mittwoch, 7. September 1960** abgehalten werden.

Außer einer Anzahl von vorgeplanten Allgemeinen Vorträgen werden die Arbeitssitzungen des Kongresses folgende zwei Sektionen umfassen:

Sektion 1: Dynamik der Flüssigkeiten (Hydro- und Aerodynamik),

Sektion 2: Dynamik der Festkörper (starrer Körper, Schwingungen, Elastizität, Plastizität).

Der Zehnte Kongreß wird dagegen weder Probleme der Thermodynamik noch Rechenmethoden als solche behandeln; doch können spezielle Anwendungen von Rechenmethoden auf einschlägige Probleme der beiden genannten Sektionen als Vorträge angemeldet werden.

Frühere Kongresse haben gezeigt, daß es wünschenswert ist, hinreichend viel Zeit für die einzelnen Vorträge und Diskussionen vorzusehen. Um eine Zeitspanne von je 45 Minuten für jedes Thema (30 Minuten für den Vortrag und 15 Minuten für die Diskussion) zu ermöglichen, wird ein Programm-Kommittee eine Auswahl unter den angemeldeten Vorträgen treffen. Daher sollen die Vortragsauszüge **vor 1. Januar 1960 in vier Exemplaren an das Sekretariat des Internationalen Kommittees (Delft, Niederlande, Prof.-Mekelweg 2)** eingereicht werden. Diese Auszüge sollen womöglich zwei Schreibmaschinenseiten (DIN A 4 mit etwa 30 Zeilen je Seite) nicht überschreiten, keinesfalls mehr als vier Seiten. Um die Arbeit des Programm-Kommittees zu erleichtern, wird empfohlen, die Auszüge in **zweien** der vier offiziellen Kongreßsprachen (deutsch, englisch, französisch, italienisch) abzufassen. Die Verfasser werden außerdem dringend gebeten, die Auszüge sehr klar zu gestalten, weil sie die Grundlage für die Auswahl der Vorträge bilden müssen. **Die Entscheidungen des Programm-Kommittees sind endgültig,** und selbstverständlich kann sich das Kommittee in keinen Briefwechsel darüber mit den Verfassern einlassen. Diese werden über die Entscheidungen unverzüglich unterrichtet.

Die örtliche Organisation des Kongresses liegt in den Händen des Italienischen Organisations-Kommittees (Präsident: *Professor C. Colonnetti*; Sekretär: *Dr. F. Rolla*, **Consiglio Nazionale delle Ricerche, Uffizio relazioni internazionali. Roma, Piazza delle Scienze 7). Alle Briefe** (ausgenommen die Vortragsauszüge) **sind an das Italienische Organisations-Kommittee zu richten.** Auskünfte über Unterkunft sowie Anmeldungsformulare können von *Dr. Rolla* ab 1. September 1959 erbeten werden.

Der Exekutiv-Ausschuß des Internationalen Kommittees der Kongresse für Angewandte Mechanik:

C. B. Biezeno, Präsident;
Richard V. Southwell;
W. T. Koiter, Sekretär (Delft, Prof.-Mekelweg 2).

INGENIEUR-ARCHIV

XXVII. BAND ZWEITES HEFT 1959

Die Beschleunigungsänderung

II. Mitteilung

Von W. Meyer zur Capellen

1. Einleitung. In Fortsetzung der I. Mitteilung werden im Folgenden wichtige Sonderfälle und Anwendungen auf Räder- und Kurbeltriebe behandelt.

2. Besondere Punkte der Ebene. Wir wenden uns zunächst einigen Sonderfällen und zwar besonderen Punkten sowie Sonderheiten der ganzen bewegten Ebene zu. Für Punkte auf der Kreisungspunktkurve k_u verschwindet das zweite Glied in $\mathfrak{R}_n$ aus[1] I (7c), während für Punkte auf dem Wendekreis K_w das erste Glied in $\mathfrak{R}_n$ aus I (7c) und das zweite Glied in $\mathfrak{R}_t$ aus I (7b) verschwindet. Dort ist also $R_t = db_t/dt$. Im Schnittpunkt von k_u und K_w, d. h. im *Ball*schen Punkt, verschwindet auch R_n, mit anderen Worten: Die drei geometrischen Örter, d. h. Kreisungspunktkurve k_u, Wendekreis K_w und Tangentialkreis K_{RT} schneiden sich außer im Momentanpol P noch im *Ball*schen Punkt U, wobei $\operatorname{tg}\varphi_u = -m/l_0$ ist.

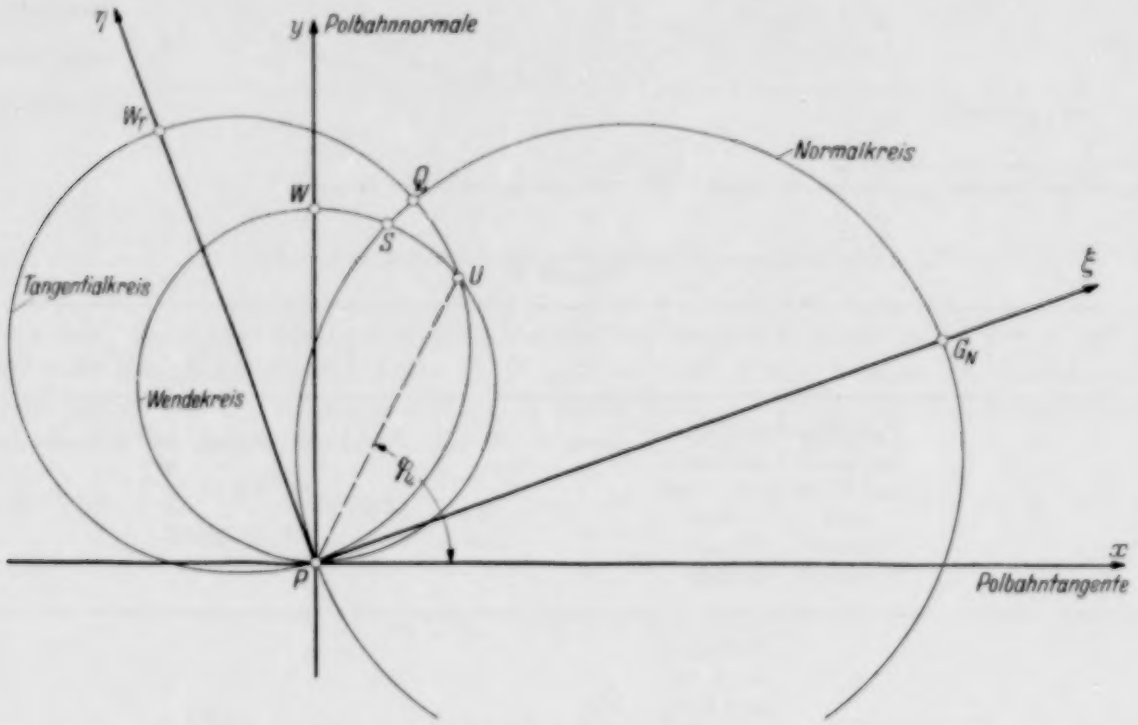


Abb. 1. Zusammenhänge zwischen Wendekreis, Tangentialkreis und Normalkreis.

Ferner ist die Tangentialkomponente R_t des Ruckes auf dem Wendekreis wie bei der geradlinigen Bewegung gleich der Ableitung der (Tangential-) Beschleunigung. Auch gibt es auf dem Wendekreis einen Punkt, für welchen R_t noch verschwindet, also b_t ein Extremum hat. Dies ist der Schnittpunkt S von Wendekreis und Normalkreis. Setzt man in I (27a) oder in I (18) die Gleichung $r = D \sin\varphi$ des Wendekreises ein, so folgt für den entsprechenden Strahl der Winkel

$$\operatorname{tg}\varphi_S = \frac{3\,D/m^*}{\dot{t}/\omega^3 - D/R_0}, \tag{1}$$

wobei in den Umformungen der Faktor $1 + 3\,D/l_0 = 1 + D\,(\tau' - \vartheta') = 1 + D/R_0 - 1 = D/R_0$ nach I (13) geschrieben werden konnte.

[1] I bedeutet I. Mitteilung.

Bei der betrachteten Konfiguration gibt es also sieben wesentliche Punkte (um es nochmals zusammenzufassen): den Momentanpol P, den Wendepol W, den Beschleunigungspol J, den Ruckpol Q, den Tangentialpol W_T, den *Ball*schen Punkt U und den Punkt S mit extremaler (Tangential-) Beschleunigung; vgl. Abb. 1, in welcher J nicht eingetragen ist.

3. Sonderfälle im Gesamtzustand der bewegten Ebene. a) Kinematisch. (Tabelle 1.) Bemerkenswerterweise liegen dann, wenn die Winkelbeschleunigung der gesamten, allgemein bewegten Ebene ein Extremum hat (Fall 2), keine wesentlichen Besonderheiten vor.

Tabelle 1[1]

Nr.	Merkmal	g	m^*	φ_J	J	T	N	φ_0	σ_Q	Q	Bemerkungen
1	$\varepsilon = 0$	∞	m	$\pi/2$	W	∞	—	$\operatorname{tg}\varphi_0 = \dfrac{m}{l_0'}$ symmetrisch zum Strahl PU	0	G_N	Tangentialkreis gleich Gerade, d. h. identisch Strahl φ_0 (Senkrechte zu $\mathfrak{R}_p$)
2	$\dot{\varepsilon} = 0$	—	—	—	—	—	$-3D^2\sqrt{\left(\dfrac{1}{m^*}\right)^2 + \dfrac{1}{l_0^2}}$	—	$\operatorname{tg}\sigma_Q = -\dfrac{3\varepsilon}{\omega^2} = -\dfrac{3g}{D}$	—	keine wesentlichen Besonderheiten[2]
3	$\dot{\varepsilon} = \omega^3$	—	—	—	—	—	∞	—	$\pi/2$	W_T	Normalkreis gleich Gerade, d. h. identisch Strahl $\varphi_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$ (Richtung von $\mathfrak{R}_p$)

[1] Striche heißen: keine Besonderheiten.
[2] der geometrische Ort für b_i = Extremum gemäß I (27) wird eine Kurve dritter Ordnung.

Tabelle 2

Nr.	Merkmal	m	m^*	l	l_0	k_u	k_a	T	N	φ_0	U, φ_u	R_{px}	R_{py}	Bemerkungen
4	$\vartheta'' = 0$	∞	g	—	—	Polbahnnormale und Kreis vom Durchmesser l	Polbahnnormale und Kreis vom Durchmesser l_0	—	—	$\operatorname{tg}\varphi_0 = \dfrac{g}{l_0}$	$\varphi_U = \dfrac{\pi}{2}$ $U \equiv W$	—	$3D\omega\varepsilon$	Wendekreisdurchmesser stationär
5	$\tau' - \vartheta' = 0$	—	—	D	∞	—	Polbahntangente und Kreis vom Durchmesser m	$\dfrac{Dg}{m^*}$	—	0	(P)	0	—	$R_0 = D$, $R_{kg} = D/2$: Kardanlage
6	$2\vartheta' + \tau' = 0$	—	—	∞	$-D$	Polbahntangente und Kreis vom Durchmesser m	—	—	—	—		$3D\omega^3$	—	$R_0 = -D/2$: $R_{kg} = D$ Umgekehrte Kardanlage
7[3]	$m = g$	—	∞	—	—	—	—	$\dfrac{Dm}{l_0}$	$\dfrac{3D^2\omega^3}{l_0(\dot{\varepsilon} - \omega^3)}$	$\dfrac{\pi}{2}$	—	—	0	

[3] gehört ebenso zur Tafel 1.

b) Geometrisch. Bei den in Tafel 2 angegebenen Sonderfällen handelt es sich, abgesehen von Nr. 7, um die wichtigsten Entartungen der Kurven k_a und k_u, wovon auch bereits an anderen Stellen[1,2] Gebrauch gemacht wurde. Darüber hinaus sind auch Kombinationen der einzelnen Fälle möglich, wie aus den folgenden Beispielen zu erkennen ist.

4. Rädertriebe. 1. Beispiel: Allgemeiner Umlaufrädertrieb. Beim einfachen Umlaufrädertrieb (Abb. 2) rollt der Kreis k_g vom Halbmesser $R_{kg} = R_r$ auf dem Kreis k_r vom Halbmesser R_0 ab, und der Steg werde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit angetrieben. Dann ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_2$ des rollenden Kreises, d. h. der allgemein bewegten Ebene auch konstant, es ver-

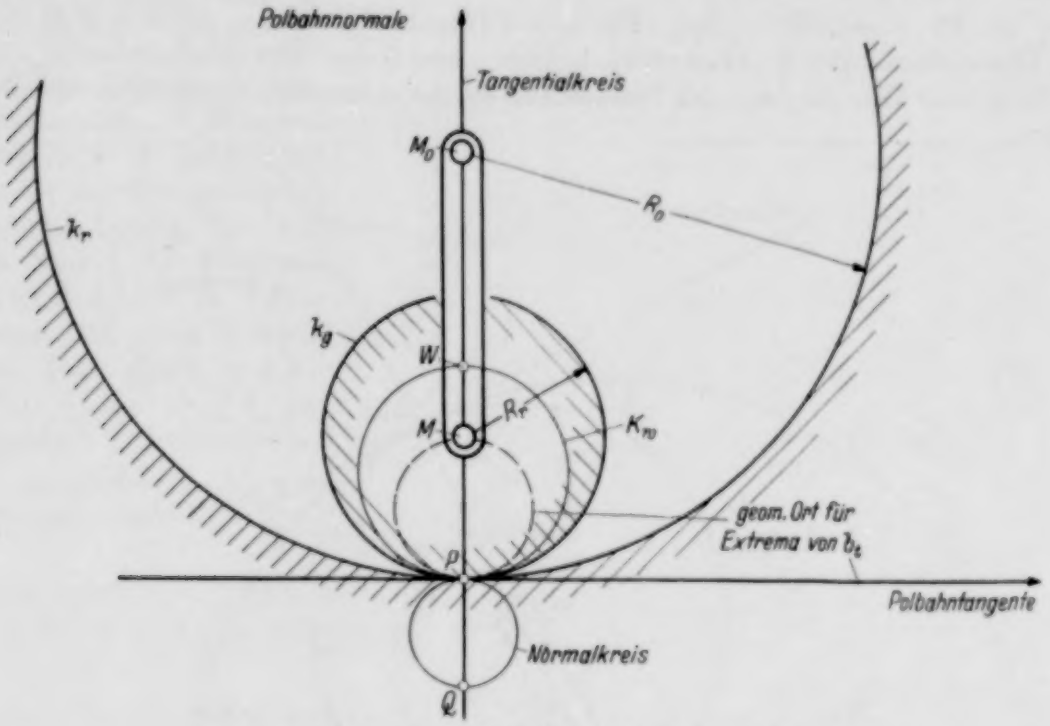


Abb. 2. Zum Ruck am Umlaufrädertrieb mit $n = R_0/R_r = 3$.

schwinden ε und $\dot{\varepsilon}$. Ferner bleibt der Wendekreisdurchmesser D konstant, d.h.[3] es gilt $\vartheta'' = 0$. Somit liegt eine Kombination der Fälle 1), 2) und 4) bzw. 7) vor, welche eine Reihe von Vereinfachungen bringt. So wird $\varphi_0 = \pi/2$ und $R_{py} = 0$ sowie $N = -3\,D^2/l_0$. Der Tangentialkreis fällt mit der Polbahnnormalen zusammen (Abb. 2). Setzt man $R_0 = n\,R_r$, so wird

$$D = R_r \frac{n}{n-1}$$

und

$$\frac{3\,D^2}{l_0} = D^2\,(\tau' - \vartheta') = D\left(\frac{D}{R_0} - 1\right),$$

d. h.

$$N = -D\frac{n-2}{n-1} = -\frac{n\,(n-2)}{(n-1)^2}\,R_r,$$

also

$$R_{px} = N\omega^3 \qquad \text{und} \qquad R_n = N\omega^3 \cos\varphi$$

unabhängig von r, speziell gleich Null für $\varphi = \pi/2$ (entarteter Tangentialkreis).

Als Besonderheit muß noch die Entartung der Kurve für ein Extremum von b_i gemäß I (27 b) hervorgehoben werden. Da $\dot{\varepsilon}$ und $1/m^*$ verschwinden, gilt jetzt (mit $R_{kg} = R_r$)

$$\omega^3 D^2 \sin\varphi\left(-\frac{1}{R_r} + \frac{1}{r}\sin\varphi\right) = 0$$

[1] vgl. Fußnote 2 von S. 58 der I. Mitteilung.
[2] vgl. *W. Meyer zur Capellen*, Konstruktion 8 (1956) S. 510 sowie 9 (1957) S. 344.
[3] *W. Meyer zur Capellen*, Arch. Getriebetechnik 4 (1936) S. 44; *W. Meyer zur Capellen*, Arch. Getriebetechnik 4 (1936) S. 577; *W. Meyer zur Capellen*, Forschung Ing.-Wes. 24 (1958) H. 6.

oder

$$r = R_r \sin\varphi \quad \text{und} \quad \varphi = 0\,;$$

d. h. der geometrische Ort zerfällt in den „Halbrollkreis", d. h. in einen Kreis vom Durchmesser R_r, welcher die Polbahntangente in P berührt, und in die Polbahntangente (insgesamt Kurve dritter Ordnung). Im ersten Fall liegen die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte auf dem Kreis vom Durchmesser R_0, der ebenfalls in P die Polbahntangente berührt, und im zweiten Fall ist immer P der Krümmungsmittelpunkt (Abb. 2 für $n = 3$).

Für $n = \infty$ (Orthozykloide) wird $D = R_r$ und N sowie R_{ps}, d. h. $\Re_p = 0$. Der eben genannte Kreis wird zum Wendekreis.

2. Beispiel: Die Kardanbewegung. Für $n = 2$ (Kardanbewegung) ist $D = 2\,R_r = R_0$, ferner $N = -R_r$ (Normalkreis gleich „Halbrückkehrkreis" und Q der Mittelpunkt von K_φ). Auch läßt sich die Behauptung über die Lage der Punkte, für welche momentan b_t ein Extremum hat, unmittelbar prüfen.

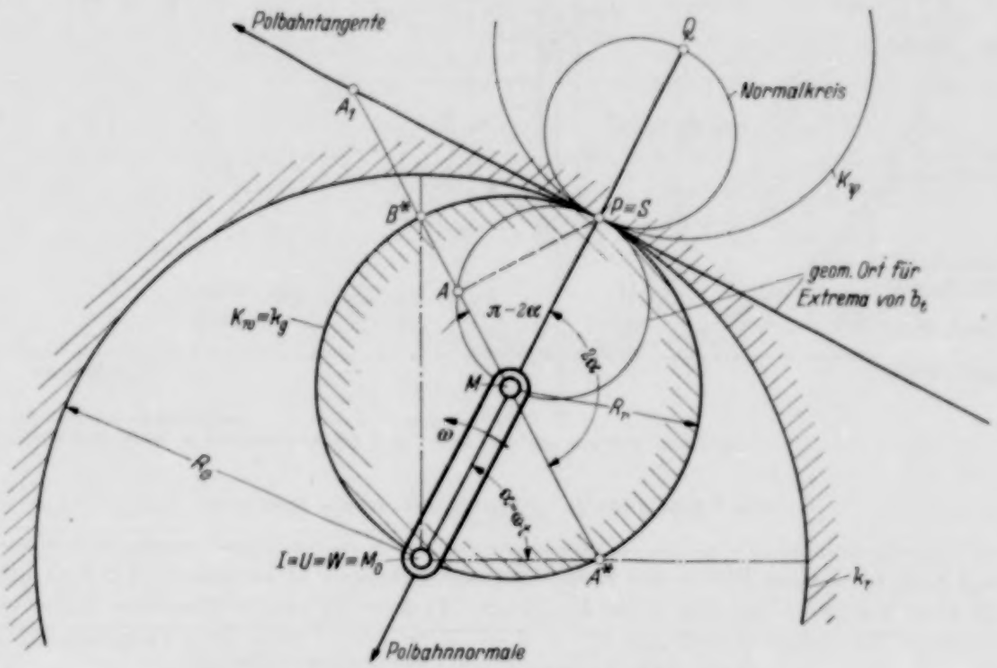


Abb. 3. Zum Ruck am Kardankreispaar ($n = 2$).

Unter Benutzung der auf Seite 55 der I. Mitteilung angegebenen Gleichung für die Ellipse, worin jetzt $\alpha = \omega\,t$ den Winkel des Steges bedeutet (Abb. 3), sowie der Formel für v wird auch

$$v = \frac{\omega}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos 2\alpha}$$

und daraus

$$b_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2}}\,\omega^2\,\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos 2\alpha}}\,.$$

Differentiiert man nochmals, so führt die Bedingung $db_t/dt = 0$ auf die in $\cos 2\alpha$ quadratische Gleichung

$$2\,(a^2+b^2)\cos 2\alpha + (a^2-b^2)\,(\cos^2 2\alpha + 1) = 0$$

mit der Lösung

$$\cos 2\alpha = -\frac{a-b}{a+b},$$

(Die zweite Lösung $\cos 2\alpha = -\dfrac{a+b}{a-b} > 1$ scheidet zunächst aus). Liegt der bewegte Punkt A innerhalb des kleinen Kardankreises, des Rollkreises, so ist $\overline{A^*A} = a$, $\overline{B^*A} = b$, $R_r = \frac{1}{2}\,\overline{A^*B^*} = \frac{1}{2}\,(a+b)$ und $p = \overline{MA} = \frac{1}{2}\,(a-b)$; d. h. die Bedingung lautet $\cos(\pi - 2\alpha) = p/R_r$; also liegt,

wie aus Abb. 3 unmittelbar zu entnehmen, der Punkt A mit extremaler Beschleunigung tatsächlich auf dem oben genannten Extremalkreis[1].

Liegt der bewegte Punkt A_1 außerhalb des Kardankreises, so ist $\overline{A^*A_1} = a$, $\overline{B^*A_1} = b$, aber $R_r = \frac{1}{2}\overline{A^*B^*} = \frac{1}{2}(a-b)$ und $\bar{p} = \overline{MA_1} = \frac{1}{2}(a+b)$; also gilt dann $\cos(\pi - 2\alpha) = R_r/\bar{p}$, somit liegt A_1 auf der Polbahntangente, wie oben behauptet[2]. Würde man hier die Strecke b, da entgegengesetzt wie vorher, negativ einsetzen, so hätte die zweite Lösung für $\cos 2\alpha$ auch ihren Sinn. Der Extremalwert selbst wird $b_t = \mp (a-b)\omega^2$, also im ersten Fall gleich $\mp 2p\omega^2$, im zweiten Fall gleich $\pm 2R\omega^2 = \pm R_0/\omega^2 = \pm D\omega^2 = \pm b_p$, wie auch zeichnerisch leicht einzusehen, da ja (vgl. oben), $\overline{AM_0} = b_A$, wenn $\omega = 1$ gezeichnet wird.

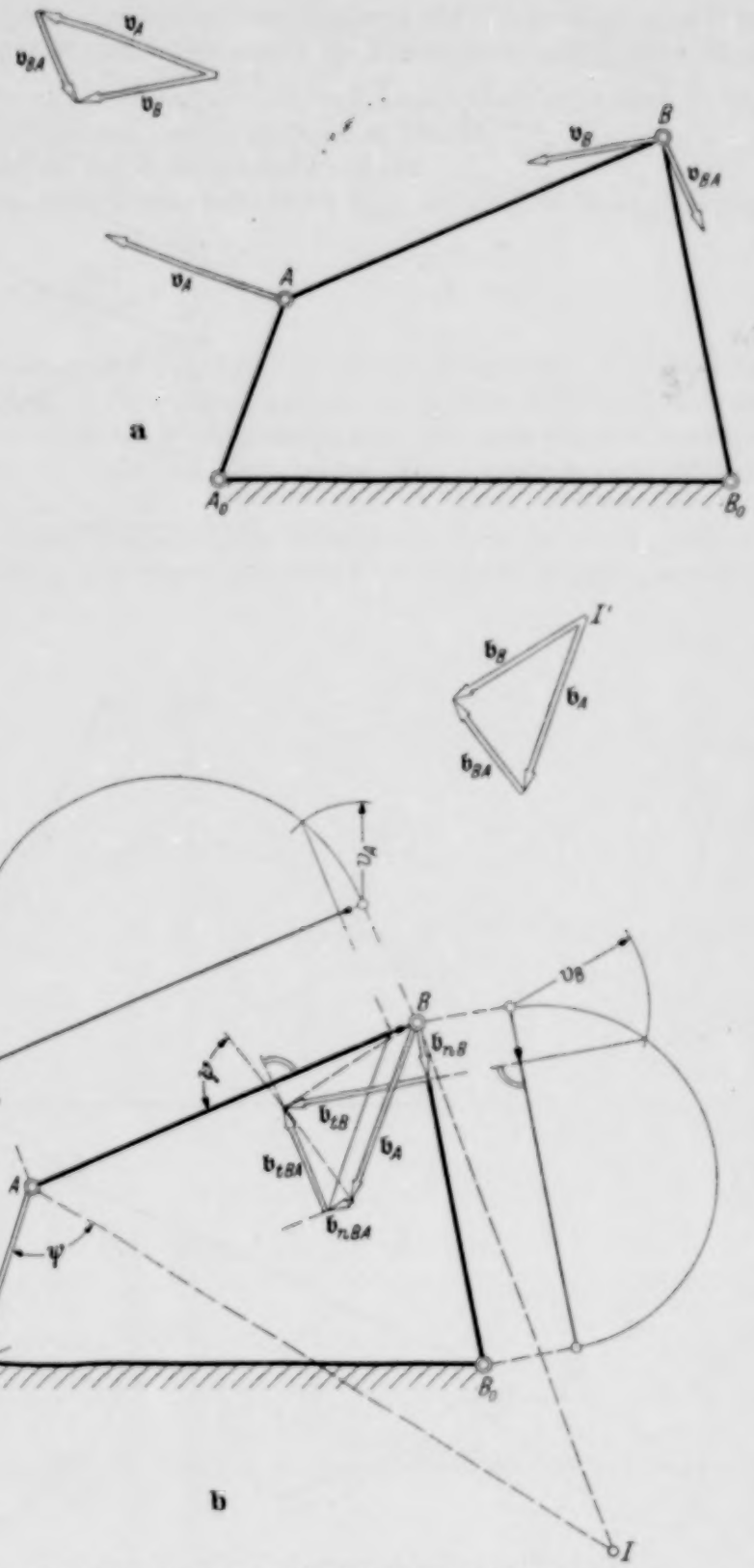


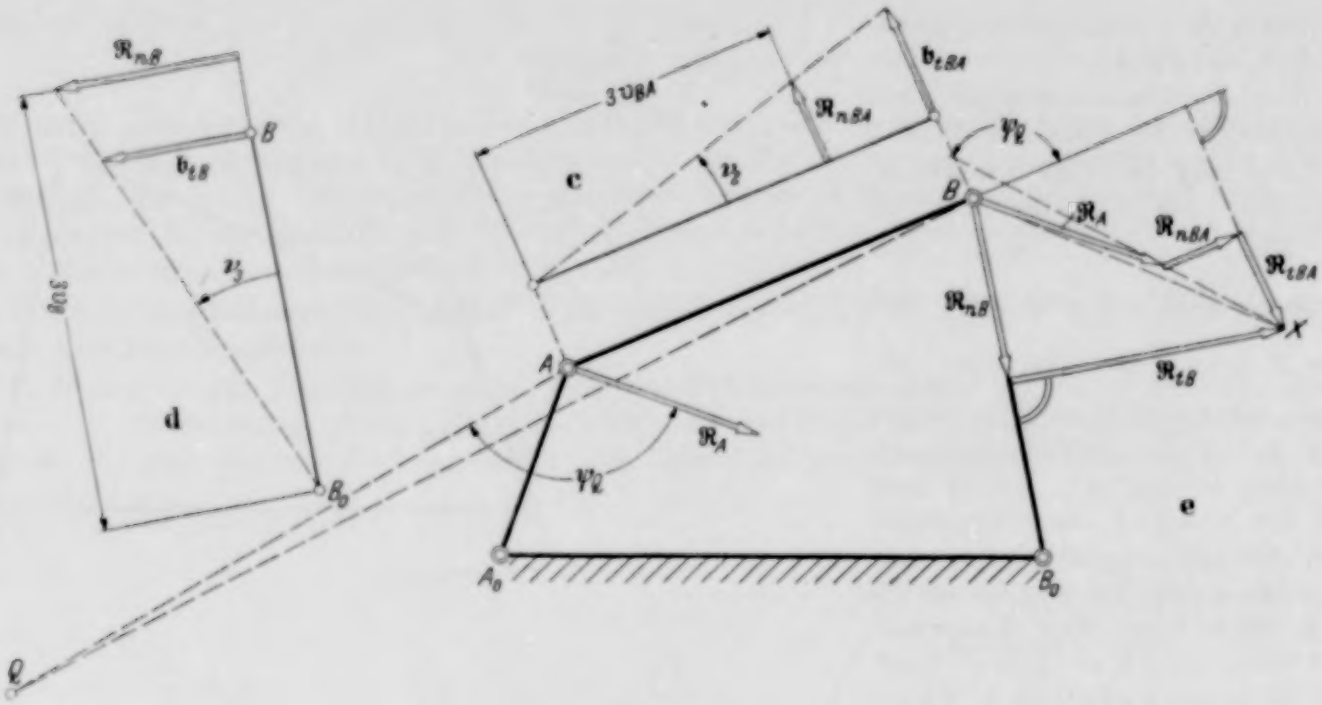
Abb. 4. Zum Ruck an einer Kurbelschwinge in allgemeiner Lage.
a) Bestimmung der Geschwindigkeiten, b) Bestimmung der Beschleunigungen.

5. Kurbeltriebe. Die folgenden Beispiele betreffen vier allgemeine und vier besondere Fälle.

1. Beispiel: Kurbelschwinge. Es soll bei einer Kurbelschwinge (Abb. 4) eine der Stellungen, in denen die Winkelbeschleunigung des Gliedes 3 und damit die Tangentialbeschleunigung des Punktes B ein Extremum hat, ermittelt werden. Die Beschleunigungen des Punktes B wurden nach den oben angegebenen Konstruktionen ermittelt, und daraus wurde geschätzt, wo ein Extremum auftritt. In der Nähe dieser Stellung wird nun der Ruck unter Benutzung der in Abb. 4a und b ermittelten Werte für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bestimmt. Dann ist zunächst, da $\mathfrak{v}_A \mathrel{\hat{=}} a\,\mathrm{cm}_s$ gezeichnet wurde und $\omega =$ konstant ist, $\Re_A = -\mathfrak{v}\omega^2$, also $R_A \mathrel{\hat{=}} a\,\mathrm{cm}_s$ und entgegengesetzt gerichtet zu $\mathfrak{v}_A$. Ferner gilt für den Ruck $\Re_B$ des Punktes B zunächst Gleichung I (2b), und die Normalkomponente beträgt $R_{nBA} = 3\,v_{BA}\,\varepsilon_2$ mit ε_2 als Winkelbeschleunigung der Koppel, wobei $\varepsilon_2 = b_{tBA}/\overline{AB} = \mathrm{tg}\,\nu_2$

[1] Dadurch sind die an anderer Stelle gefundenen Ergebnisse in einem breiteren Zusammenhang gerückt; vgl. *W. Meyer zur Capellen*, Werkstatt und Betrieb 91 (1958) S. 723; ferner Maschinenbautechnik 7 (1958) S. 404, und Vortrag auf der VDI/AWF Fachtagung Getriebetechnik in Konstanz: Über räumliche Kurbelschleifen und ihre gleichwertigen ebenen Getriebe, VDI Getriebeheft Bd. 29 (1958) S. 91. In der hier betrachteten Stellung wird bei der elliptischen Schleife mit dem Steg Null (gleichwertig dem Kreuzgelenk) das Übersetzungsverhältnis $i = 1$.

[2] Wendet man auf die Bahn des Punktes $\bar{A}$ den Satz von der doppelten Erzeugung der zyklischen Kurven an, so liegt der Punkt A im zweiten Getriebe wieder auf dem „Halbrollkreis"; vgl. Fußnote 3 von Seite 75; ferner *W. Meyer zur Capellen*, Konstruktion 8 (1956) S. 268.



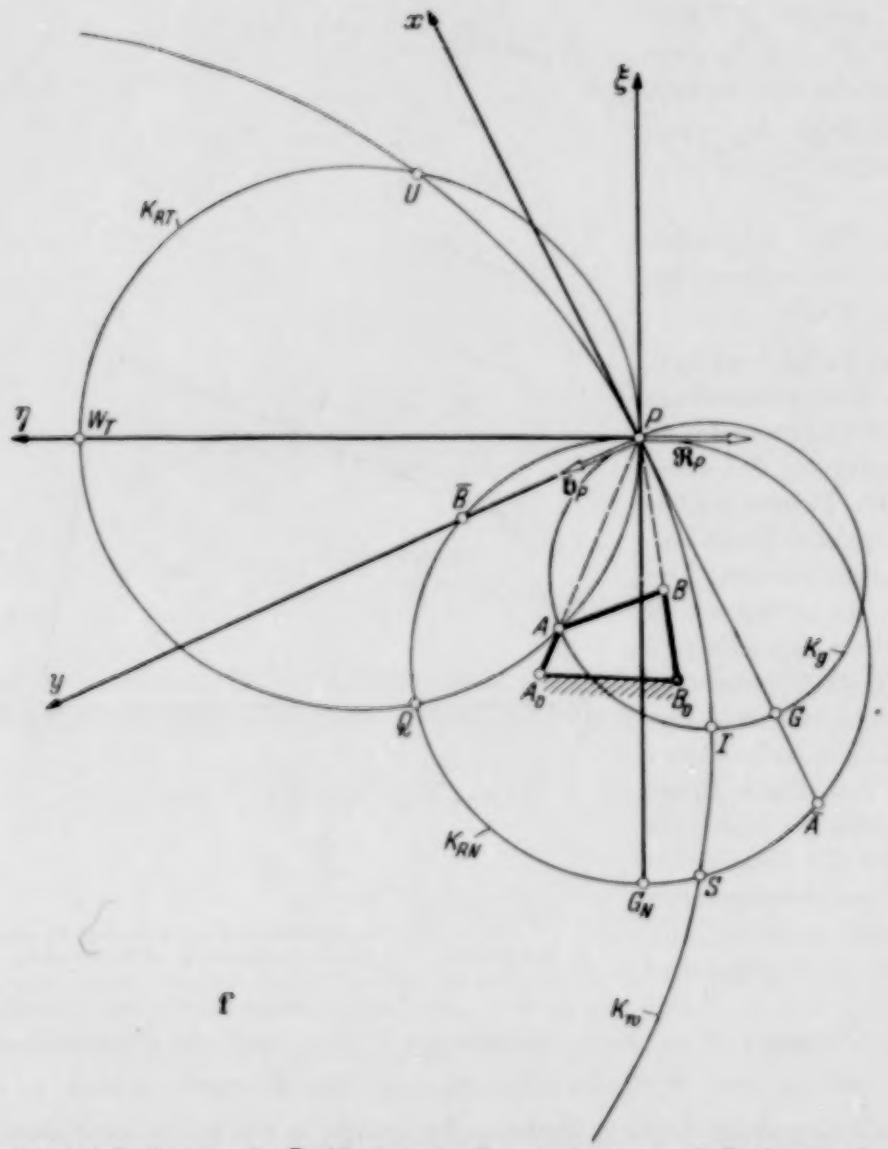


Abb. 4. c) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{nBA} = 3\,v_{BA} \cdot \varepsilon_3$, d) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{nB} = 3\,v_B \cdot \varepsilon_3$, e) Bestimmung des Ruckes nach dem Satz von *Euler*, f) die Koppelebene in ihrer Gesamtkonfiguration.

ist (Abb. 4c). Somit kann, wie dort gezeigt, sofort R_{nBA} abgegriffen werden. In gleicher Weise kann $R_{nB} = 3\,v_B\,\varepsilon_3$ ermittelt werden (Abb. 4d). Man trägt nun an die Spitze des in B angetragenen Vektors $\Re_A$ (Abb. 4e) den Vektor $\Re_{nBA}$ parallel zu BA an, ebenso von B aus den Vektor

$\Re_{nB}$ auf. Die Senkrechte zu B_0B im Endpunkt der Spitze von $\Re_{nB}$ und die Senkrechte zu AB im Endpunkt der Spitze von $\Re_{nBA}$ treffen sich in X und liefern damit die Tangentialkomponenten $\Re_{tBA}$ und $\Re_{tB}$ von $\Re_B = \overrightarrow{BX}$. Hierin ist nun $\Re_{tB} = r_B\dot{\varepsilon}_3 - r_B\omega_3^2 = r_B\dot{\varepsilon}_3 - b_{nB}\omega_3$, wobei der letztere Betrag $y_2 = b_{nB}\,\mathrm{tg}\,\vartheta_3$ mit $\mathrm{tg}\,\vartheta_3 = v_B/r_B$ leicht zeichnerisch gewonnen werden könnte.

Abb. 4f zeigt die Kurbelschwinge innerhalb der Gesamtkonfiguration.

Wenn nun ε_3 ein Extremum, also $\dot{\varepsilon}_3$ gleich Null sein soll, so ist R_{tB} gleich dem Wert y_2. Trägt man dann den Quotienten

$$y = \frac{R_{tB}}{r_B\omega_3^2} = \frac{y_1}{y_2}$$

über α auf (Abb. 5a), so ergeben die Schnittpunkte der Kurve y mit der Parallelen $Y = -1$ zur α-Achse diejenigen Kurbelwinkel α, für welche ε_3 ein Extremum hat; vgl. a. Abb. 5b hinsichtlich des Verlaufes von ε_3 in Funktion des Kurbelwinkels α. Wohlgemerkt benötigt man die Konstruktion des Ruckes nur in wenigen Stellungen in der Nähe des Extremums. Das Ergebnis der ähnlichen Untersuchung für die Koppel zeigen Abb. 5c und d.

2. Beispiel: Schubkurbel. Bei einem geschränkten Schubkurbelbetrieb ist in Abb. 6a nach dem gleichen Verfahren der für den Ruck erweiterte Satz von *Euler* benutzt worden, und zwar

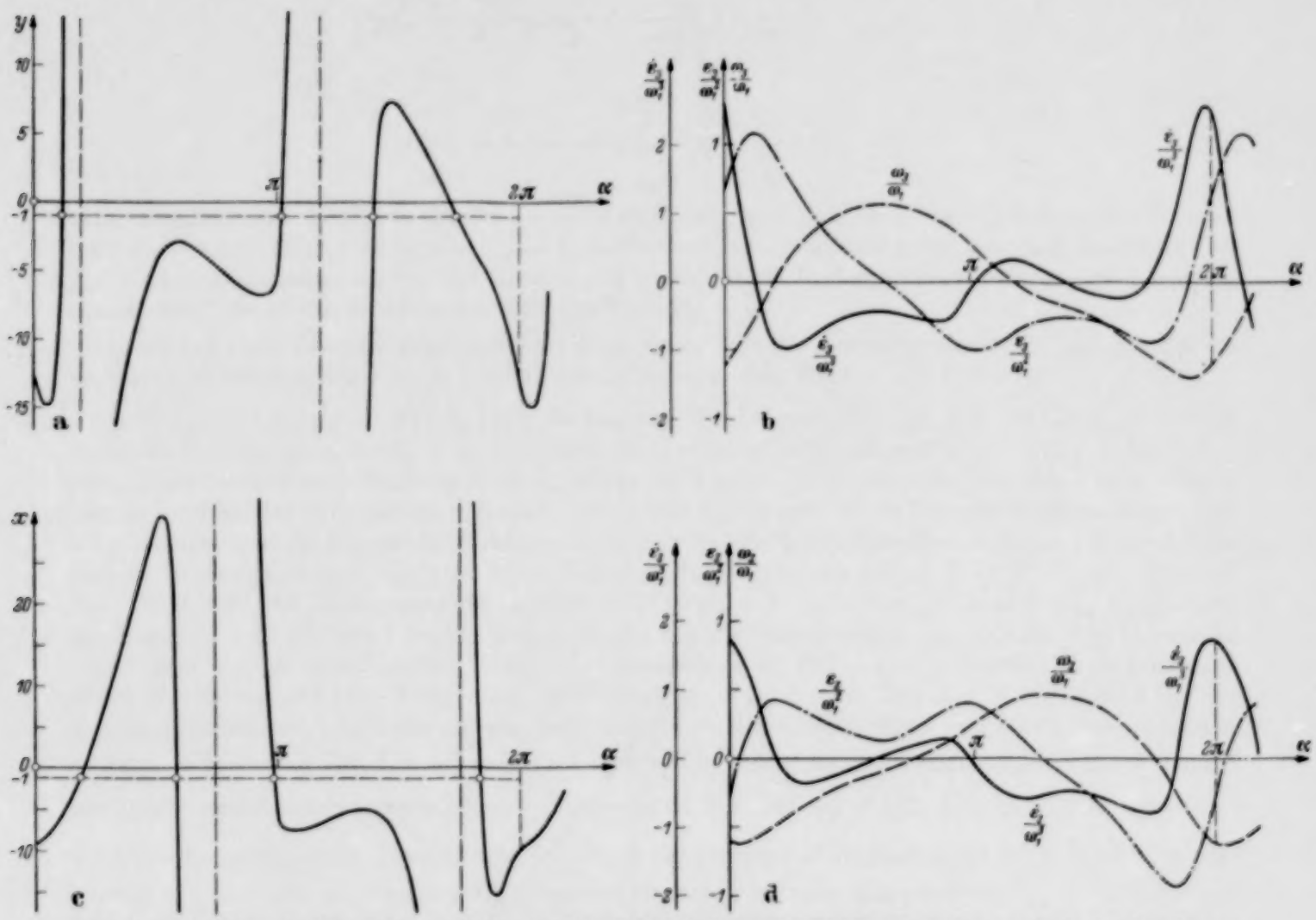


Abb. 5. Zur Ermittlung des Kurbelwinkels α des Antriebes der Kurbelschwinge nach Bild 4 für die Stellung maximaler Beschleunigung. — a) der Quotient $y = \frac{R_{tB}}{r_3\omega_3^2}$ (α) für die Abtriebsbewegung; b) die Bewegungsgesetze des Abtriebes; c) der Quotient $x = \frac{R_{tBA}}{r_2\omega_2^2} = h(\alpha)$ für die Koppelbewegung; d) die Bewegungsgesetze der Koppel.

in der Stellung, in welcher die Beschleunigung b des geradgeführten Punktes B ein Extremum hat. Die Stellung konnte auf Grund der Maßbeziehungen $\lambda = a/c$ = Kurbellänge/Koppellänge und $\bar{\varepsilon} = e/c$ = Schränkung/Koppellänge einer anderen Arbeit entnommen werden,[1] und die zeichnerische

[1] *W. Meyer zur Capellen* u. Mitarbeiter, Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel, Forschungsbericht Nr. 449 Opladen 1957.

Lösung bestätigt die dort gefundenen Ergebnisse. Gegenüber Beispiel 1 vereinfacht sich das Verfahren ein wenig, da die Normalkomponente R_n des Ruckes für B immer verschwindet.

Für den Bewegungszustand der Koppelebene ergeben sich in dieser Stellung folgende Besonderheiten: B ist der *Ball*sche Punkt U, d. h. B liegt auf dem Schnittpunkt von Wendekreis und Tangentialkreis. Da $R_t = db_t/dt - v^3/\varrho^2 = R$ verschwindet, weil $\varrho = \infty$ ist und $db_t/dt = db/dt$ gleich Null ist, liegt B auch auf dem Normalkreis, d. h. aber Ruckpol und *Ball*scher Punkt fallen zusammen, wie in Abb. 6b angegeben ist.

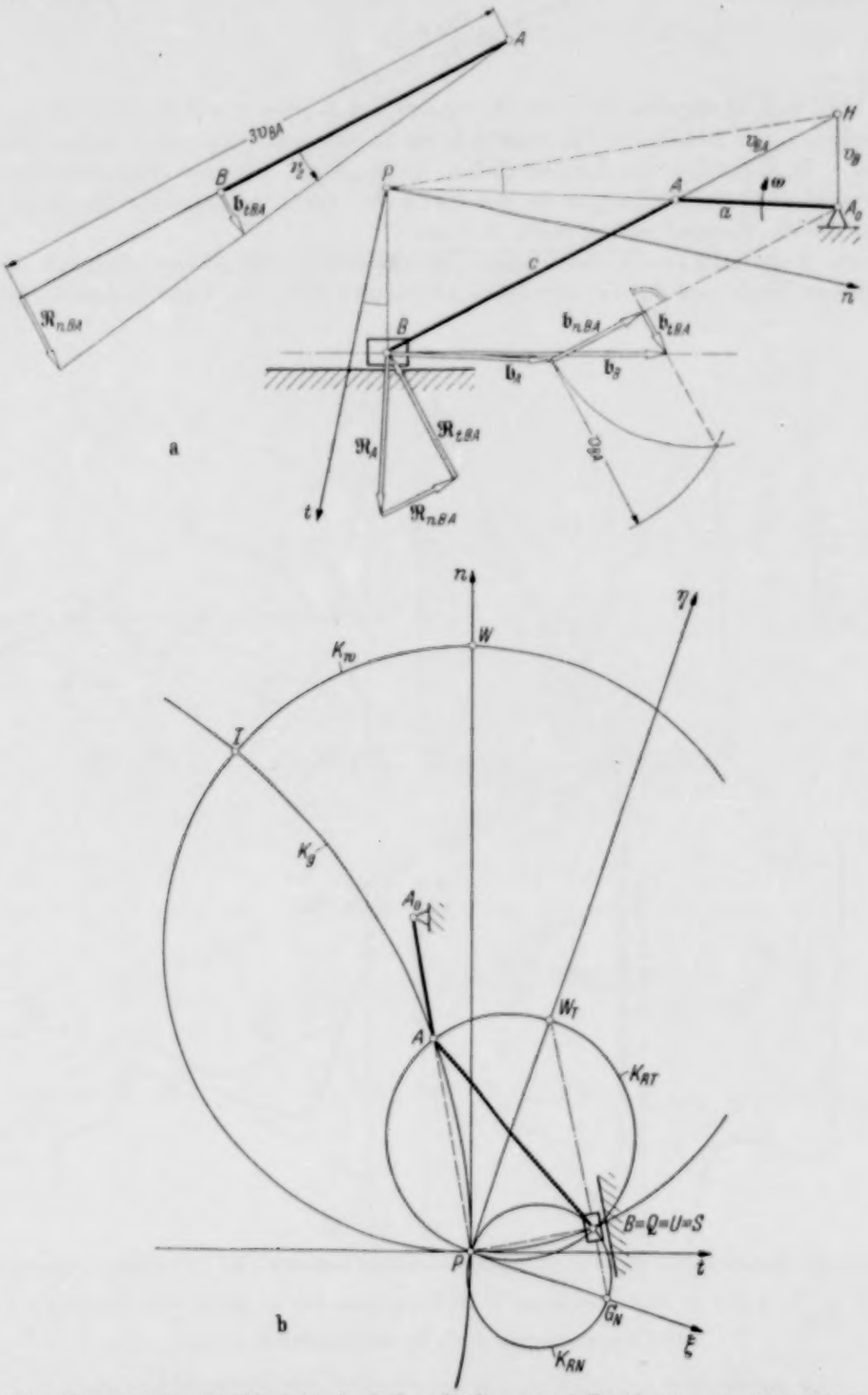


Abb. 6. Der Ruck einer Schubkurbel in der Stellung für die maximale Beschleunigung des Schubgliedes. — a) die Bestimmung der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und des Ruckes des Schubgliedes, b) die Koppelebene in ihrer Gesamtkonfiguration.

3. Beispiel: Totlage. Wenn eine Kurbelschwinge sich in der Totlage befindet, und die Koppel senkrecht zur Schwinge steht (Abb. 7), so hat, wie sich aus dem Satz von *Euler* leicht ergibt[1], die Win-

[1] Vgl. Fußnote 3 von Seite 75.

kelgeschwindigkeit ω_2 der Koppelebene ein Extremum, d. h. es ist $\varepsilon_2 = \varepsilon = 0$. Dann zeigt die Anwendung des Satzes von *Euler* für den Ruck, daß $b_B = b_{tB}$ und damit ε_3 ein Extremum hat. Dies folgt auch aus allgemeinen Erörterungen: $\varepsilon = 0$ und $m = g$ $(= \infty)$ bedeutet die Kombination der Fälle 1 und 7 aus den Tafeln 1 und 2. Der Tangentialkreis geht in die Polbahnnormale über, $R_{py} = R_{tB}$

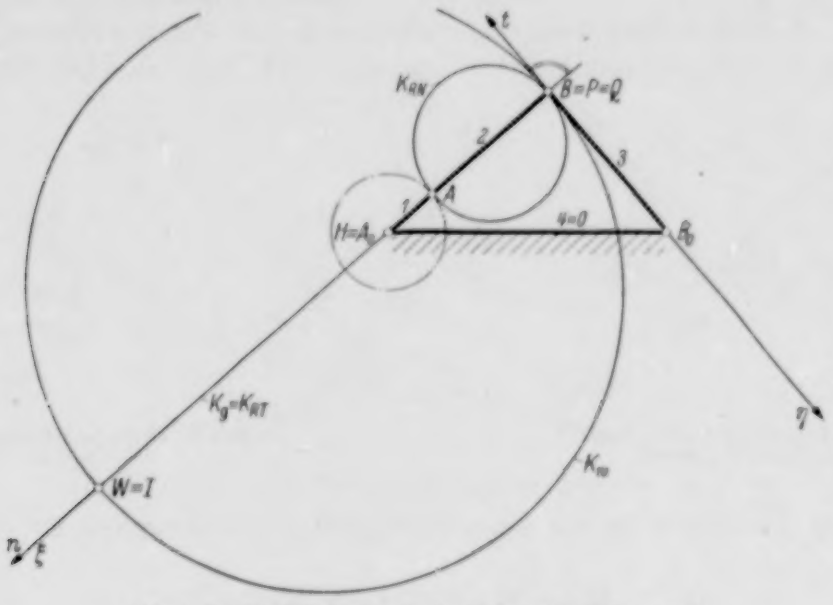


Abb. 7. Die Kurbelschwinge in der Totlage ($\sphericalangle ABB_0 = \pi/2$).

verschwindet, und da $R_{tB} = db_t/dt - v^2/\varrho^3 = db_t/dt$ ist, weil ja v im Augenblick verschwindet, so muß db_t/dt auch verschwinden, also $b_{tB} = b_t$ ein Extremum haben, und zwar, wie nach dem Satz von *Euler* leicht einzusehen ist, von der Größe $b_A\,(1 + a/c)$. Wird B_0B unendlich groß, so haben wir den zentrischen Schubkurbeltrieb in der äußeren Totlage.

Steht bei einer Kurbelschwinge in der inneren Totlage die Schwinge senkrecht zur Koppel, so ergeben sich die gleichen Dinge, nur hat das Extremum den Wert $-\,b_A\,(1 - a/c)$.

4. Beispiel: Doppelkurbel. Da zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Glieder *1*, *3* und *4* $\equiv 0$ die Beziehung $\omega_{30} = \omega_{10} + \omega_{31}$ besteht und $\omega_{10} =$ konstant ist, so muß $\ddot{\omega}_{30} = \ddot{\omega}_{31}$, d. h. $\dot{\varepsilon}_{30} = \dot{\varepsilon}_{31}$, also in der betrachteten Stellung auch $\dot{\varepsilon}_{31}$ gleich Null sein. Hält man also jetzt das kleine Glied a fest, so muß bei der entstehenden Doppelkurbel (Abb. 8), bei welcher die Abtriebskurbel sich auf dem Steg befindet und die Koppel senkrecht zu diesem steht, die Winkelbeschleunigung der Koppelebene und die Winkelgeschwindigkeit des Abtriebgliedes[1] ein Extremum haben. Dies folgt auch unmittelbar: Da A_0 mit dem Momentanpol zusammenfällt, ist $v_A = a\,\omega_{10} = a\,\omega_{20}$, d. h. $\omega = \omega_{10} = \omega_{20}$. Ferner liegt A als Punkt des Gleichenkreises K_g auf der Polbahntangente, d. h. es ist $A \equiv G$, und der Kreis über PA als Durchmesser ist der Gleichenkreis, d. h. $PA = (-)\,g$. Dieser Kreis geht auch durch B, also hat B k e i n e Tangentialbeschleunigung, es ist $\varepsilon_3 = 0$. Da aber A und B auch auf der Kreisungspunktkurve k_u liegen müssen, entartet diese in den Gleichenkreis und die Polbahntangente, es ist $g = m = (-)\,\overline{PA}$, $l = \infty$, d. h. $l_0 = -\,D$: Wir haben die Kombination der Fälle 1, 6 und 7 aus Tafel 1 und 2. Hiernach wird $\mathrm{T} = \dfrac{D\,m}{l_0} = -\,m = \overline{PA}$ und $\varphi_0 = \pi/2$, d. h. der Gleichenkreis ist auch der Tangentialkreis. Nun gilt für den Ruck des Punktes A als Endpunkt der Kurbel doch tangential $R_{tA} = -\,\overline{PA}\,\omega_1^3$, da $\dot{\varepsilon}_1 = 0$, andrerseits aber als Punkt der Koppelebene $R_{tA} = \overline{PA}\,(\dot{\varepsilon}_2 - \omega_2^3)$, und weil beide Werte einander gleich sein müssen, folgt mit $\omega = \omega_1 = \omega_2$ auch $\dot{\varepsilon}_2 = 0$. Nach dem Satz von *Euler* für den Ruck ist aber $R_{nA} = R_{px} + 3\,\omega_2\,\varepsilon_2\,\overline{PA}$, und muß dieser Wert, da A auf dem Tangentialkreis liegt, gleich Null sein. Nun ist gemäß Tafel 2, Nr. 6, doch $R_{px} = +\,3\,D\,(\omega_2)^3$, d. h. es muß $\varepsilon = \varepsilon_2 = -\,\omega^2\,D/m$ werden, wie ja auch aus der Definition des Gleichenkreises $(m = g)$ oder aus dem Satz von *Euler* für die Beschleunigungen, angewendet auf Punkt B, folgt. Der Durchmesser des Normalkreises ergibt sich beiläufig aus Nr. 6 der Tabelle 2 zu $\mathrm{N} = 3\,D$ (Abb. 8), wobei der Wendekreis mit der *Hartmann*schen Konstruktion zeichnerisch ermittelt wurde, allerdings aus der *Euler-Savary*schen Formel für das Punktepaar B, B_0 auch rechnerisch bestimmt werden konnte.

[1] Vgl. Fußnote 3 von Seite 75, zweite Arbeit.

5. Beispiel: Parallellage. Die Kurbelschwinge befinde sich in der Parallellage, d. h. P sei unendlich fern (Abb. 9). Dann ist $\omega_2 = 0$ und, wie an anderer Stelle gezeigt wurde[1], aber auch

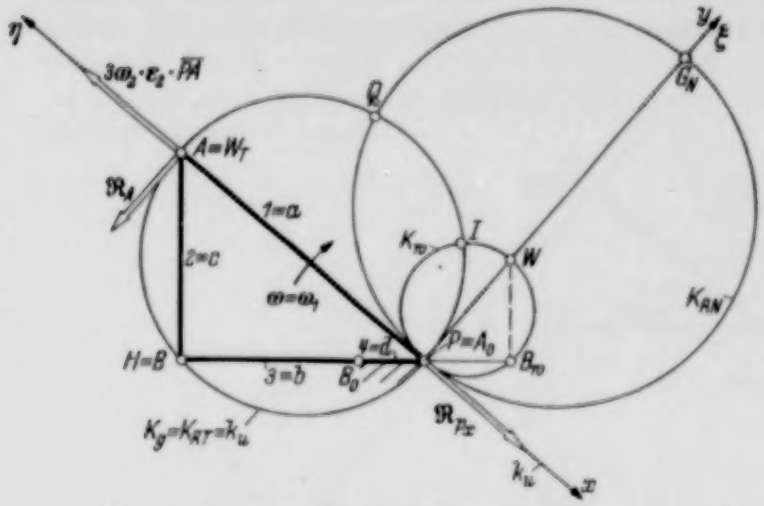


Abb. 8. Die Doppelkurbel in der Steglage ($\sphericalangle ABB_0 = \pi/2$, $\Re_A \triangleq a/3$).

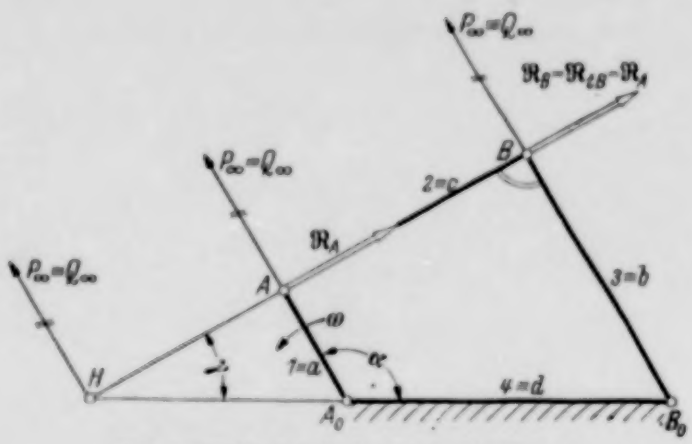


Abb. 9. Die Kurbelschwinge in der Parallellage ($\sphericalangle ABB_0 = \pi/2$, $Q = P$).

leicht mit dem Satz von *Euler* für die Geschwindigkeiten nachzuweisen ist, $\varepsilon_3 = 0$. Damit gilt einerseits

$$\Re_B = \Re_A + \Re_{tBA} + \Re_{nBA},$$

wobei

$$R_A = (-)\, a\, \omega_1^2\,, \qquad R_{nBA} = 3\,\omega_2\,\varepsilon_2\,c = 0$$

und

$$R_{tBA} = c\,(\dot{\varepsilon}_2 - \omega_2^2) = c\,\dot{\varepsilon}_2\,, \qquad \text{da} \qquad \omega_2 = 0\,.$$

Andrerseits gilt $\Re_B = \Re_{nB} + \Re_{tB}$, wobei $R_{nB} = 3\,\omega_3\,\varepsilon_3\,\overline{B_0B} = 0$, da $\varepsilon_3 = 0$, und beiläufig $R_{tB} = \overline{B_0B}\,(\dot{\varepsilon}_3 - \omega_3^2)$ ist. Es muß also $R_{tBA} = R_{nB}$, d. h. $\dot{\varepsilon}_2 = 0$ (und $R_{tB} = R_A$) sein. Ebenso wird, da hier $R_A = R_{tB}$ und

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\overline{A_0A}}{\overline{B_0B}} = \frac{a}{b}$$

gilt,

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{a}{b}\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right)\omega_1^2$$

gefunden. Im übrigen weist die in Funktion des Kurbelwinkels α aufgetragene Kurve des Koppelwinkels γ in der betrachteten Stellung ein Extremum auf (da $\dot{\gamma} = \omega_2 = 0$), ebenso die Kurve der Winkelbeschleunigung $\ddot{\gamma}_2 = \varepsilon_2$, bzw. hat die Kurve für ω_2 hier einen Wendepunkt (da $\ddot{\omega}_2 = \dot{\varepsilon}_2 = 0$).

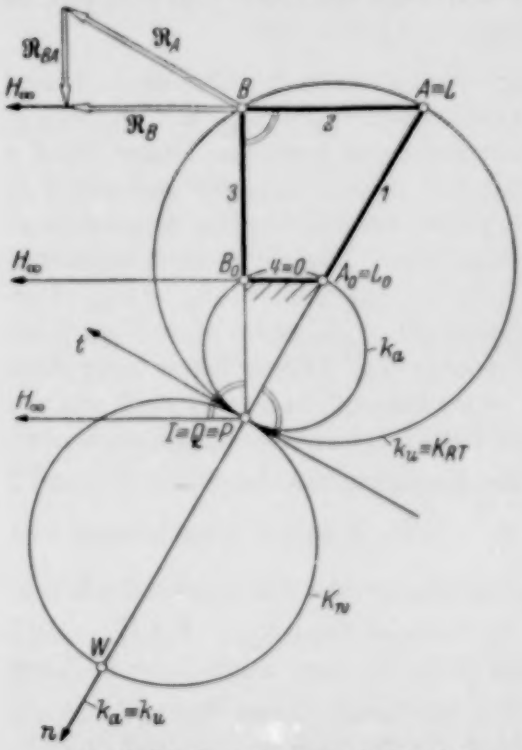


Abb. 10. Die Doppelkurbel in der Parallellage ($\sphericalangle ABB_0 = \pi/2$, $Q = P$).

6. Beispiel: Doppelkurbel. Betrachtet man die Relativbewegung von Glied 3 gegen Glied *1*, d. h. hält man das kleine Glied fest, so erhält man eine Doppelkurbel in der Stellung, in welcher Koppel und Steg einander parallel sind und die Abtriebskurbel senkrecht zum Steg steht (Abb. 10). Aus ähnlichen Überlegungen wie beim Übergang von Beispiel 3 zu Beispiel 4 folgt dann, daß $\varepsilon_2 = 0$ und $\varepsilon_3 = 0$ ist.[2] Mit Hilfe der Sätze vom Ruck läßt sich die letztere Besonderheit auch direkt nachweisen. So muß für den Punkt B die auf S. 54 der I. Mitteilung angegebene Winkelbeziehung $\operatorname{tg}(\varkappa + \pi/2) = 3 \operatorname{tg} \psi$ erfüllt sein.

Im übrigen steht nach der *Bobillier*schen Konstruktion der Polbahntangente diese senkrecht zu PA, d. h. wir haben die Kombination der Fälle 1, 6 und 7 aus Tafel 1 und 2, wobei noch $l = -\overline{PA}$ und $l_0 = -\overline{PA_0}$ wird. Da Koppel und Steg parallel sind, also der Pol P_{31} unendlich fern liegt, ist

[1] Vgl. Fußnote 3 von Seite 75, zweite Arbeit, und Fußnote 2 von Seite 75.
[2] Vgl. Fußnote 2 von Seite 77, zweite Arbeit.

nach dem Satz über die Relativpole $\omega_{31} = 0$, d. h. $\omega_1 = \omega_3$, woraus sofort mit $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ($R_{nB} = R_{nBA} = 0$) und $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_3 = 0$ der Ruck des Punktes B zu $R_B = -\omega_3^3 \overline{B_0 B} = -\omega_3^3 b$ und damit

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\omega_1^3 \left[\left(1 - \frac{d}{c}\right) - \left(1 - \frac{d}{c}\right)^3\right]$$

mit $c = \overline{AB}$ und $d = \overline{A_0 B_0}$ gefunden werden.

7. Beispiel: Kurbelschleife. Bei der zentrischen schwingenden Kurbelschleife nach Abb. 11 ist der Ruck für die Schleife nach den vorhergehenden Konstruktionen (vgl. Abb. 3 der I. Mit-

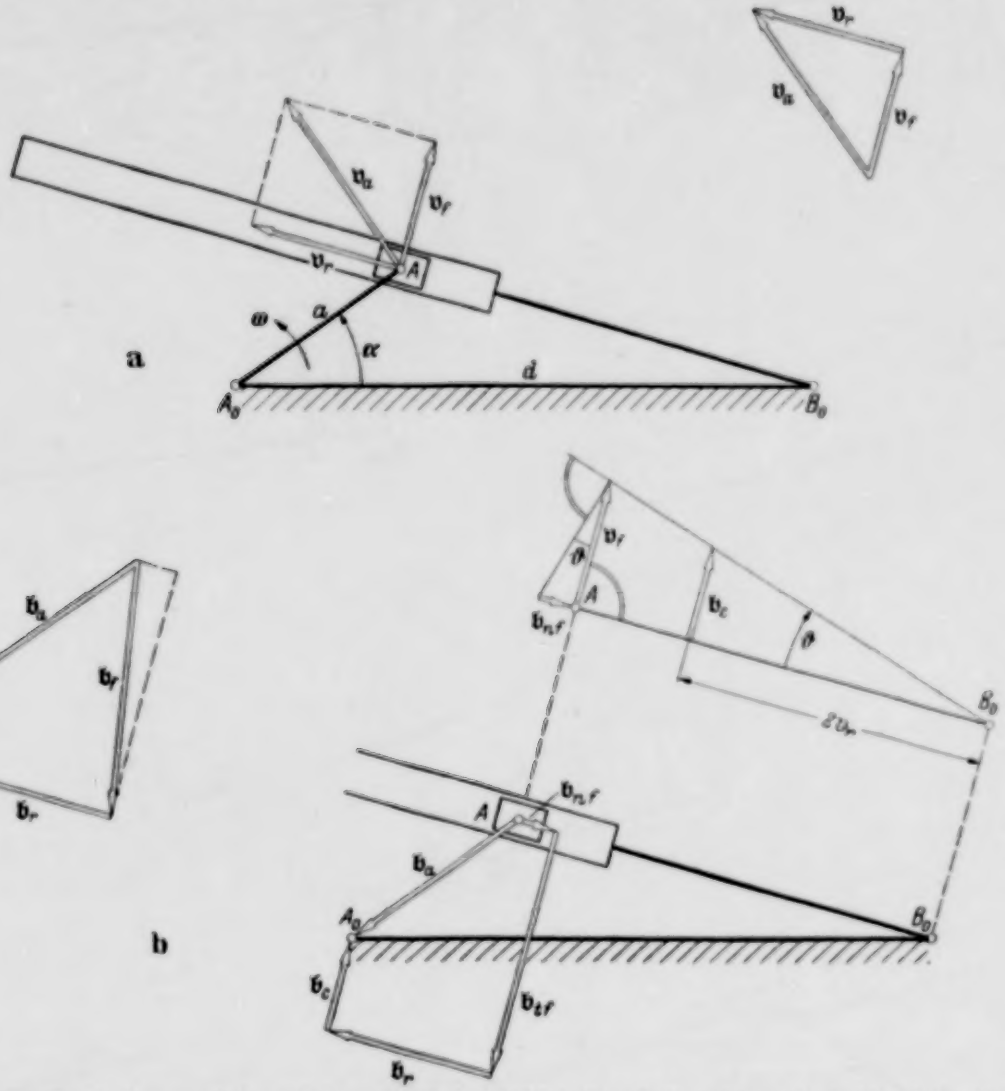


Abb. 11. Der Ruck einer zentrischen schwingenden Kurbelschleife in ihrer Stellung für maximale Abtriebsbeschleunigung. — a) Bestimmung der Geschwindigkeiten, b) Bestimmung der Beschleunigungen.

teilung) ermittelt worden und zwar in derjenigen Stellung, in welcher die Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_f$ ein Extremum hat, also $\dot{\varepsilon} = 0$ wird, wobei der Antriebswinkel α sich aus einer quadratischen Gleichung[1] ergibt. Nach der üblichen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktion (Abb. 11a und b), bei welcher $\mathfrak{b}_a - \mathfrak{b}_c - \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_{nf} + \mathfrak{b}_{tf}$, und $\mathfrak{b}_{nf} = v_f^2/\overline{B_0 A} = \overline{B_0 A}\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta$, $\mathfrak{b}_c = 2\,v_{rel}\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ geschrieben wurde, bestimmt man den Ruck $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_{abs} = -\mathfrak{v}_A\,\omega^2 \mathrel{\hat{=}} a$ cm gezeichnet, ebenso die Komponente R_{nf} des Führungsruckes $\mathfrak{R}_f$, d. h. $R_{nf} = (-)\,3\,v_f\,\varepsilon_f = 3\,v_f\,\mathrm{tg}\,\nu$, wobei $\varepsilon_f = b_{tf}/\overline{B_0 A} = \mathrm{tg}\,\nu$ gesetzt ist (Abb. 11c) und dann die Komponenten des Zusatzruckes gemäß I (33c), d. h. in Abb. 11d die Komponente $R_{zus\,1} = 3\,\omega_f\,b_r = 3\,b_r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ senkrecht zur Führung gemäß $\mathfrak{R}_{zus\,1} = 3\,\bar{\omega}_f \times \mathfrak{b}_r$, wobei $\mathrm{tg}\,\vartheta = v_f/\overline{B_0 A}$ ist, in Abb. 11e schließlich $R_{zus\,2} = 3\,\varepsilon_f\,v_r = 3\,v_r\,\mathrm{tg}\,\nu$, ebenfalls senkrecht b_r gemäß $\mathfrak{R}_{zus\,2} = 3\,\bar{\varepsilon}_f \times \mathfrak{v}_r$ und in Abb. 11f ferner $\mathfrak{R}_{zus\,3} = (-)\,3\,\omega_f^2\,\mathfrak{v}_r = (-)\,3\,\mathfrak{v}_r\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta$ entgegengesetzt $\mathfrak{v}_r$, daraus $\mathfrak{R}_{zus}$ als geometrische Summe (Abb. 11g). Man schreibe I (33b) in der Form

$$\mathfrak{R}_A = -\mathfrak{R}_{nf} - \mathfrak{R}_{zus} = \mathfrak{R}_{tf} + \mathfrak{R}_r$$

und trage an A (Abb. 11h) nacheinander an: $\overrightarrow{A\,1} = \mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_a$, $\overrightarrow{12} = -\mathfrak{R}_{nf}$, $\overrightarrow{23} = -\mathfrak{R}_{zus}$. Dann trifft die Senkrechte durch 3 zur Führung diese in 4, und es ist $\overrightarrow{A\,4} = \mathfrak{R}_r$ sowie $\overrightarrow{43} = \mathfrak{R}_{tf}$. Da nach

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Werkstatt und Betrieb 89 (1956) S. 581.

I (26b) $\Re_{tf} = \dot{\vec{\varepsilon}}_f \times \overrightarrow{B_0 A} - \omega_f^2 \mathfrak{v}_f$ ist und $\dot{\varepsilon}_f = 0$ sein soll, muß also $\overrightarrow{43} = -\omega_f^2 \mathfrak{v}_f$, d. h. der Betrag gleich $v_f \operatorname{tg}^2 \vartheta$ sein, wie in Abb. 11i konstruiert und wie sich durch Vergleich beider Strecken zeigt. Es sei ausdrücklich betont, daß es sich um ein Erläuterungsbeispiel handelt, da ja die Lösung der erwähnten quadratischen Gleichung schneller zum Ziel führt.

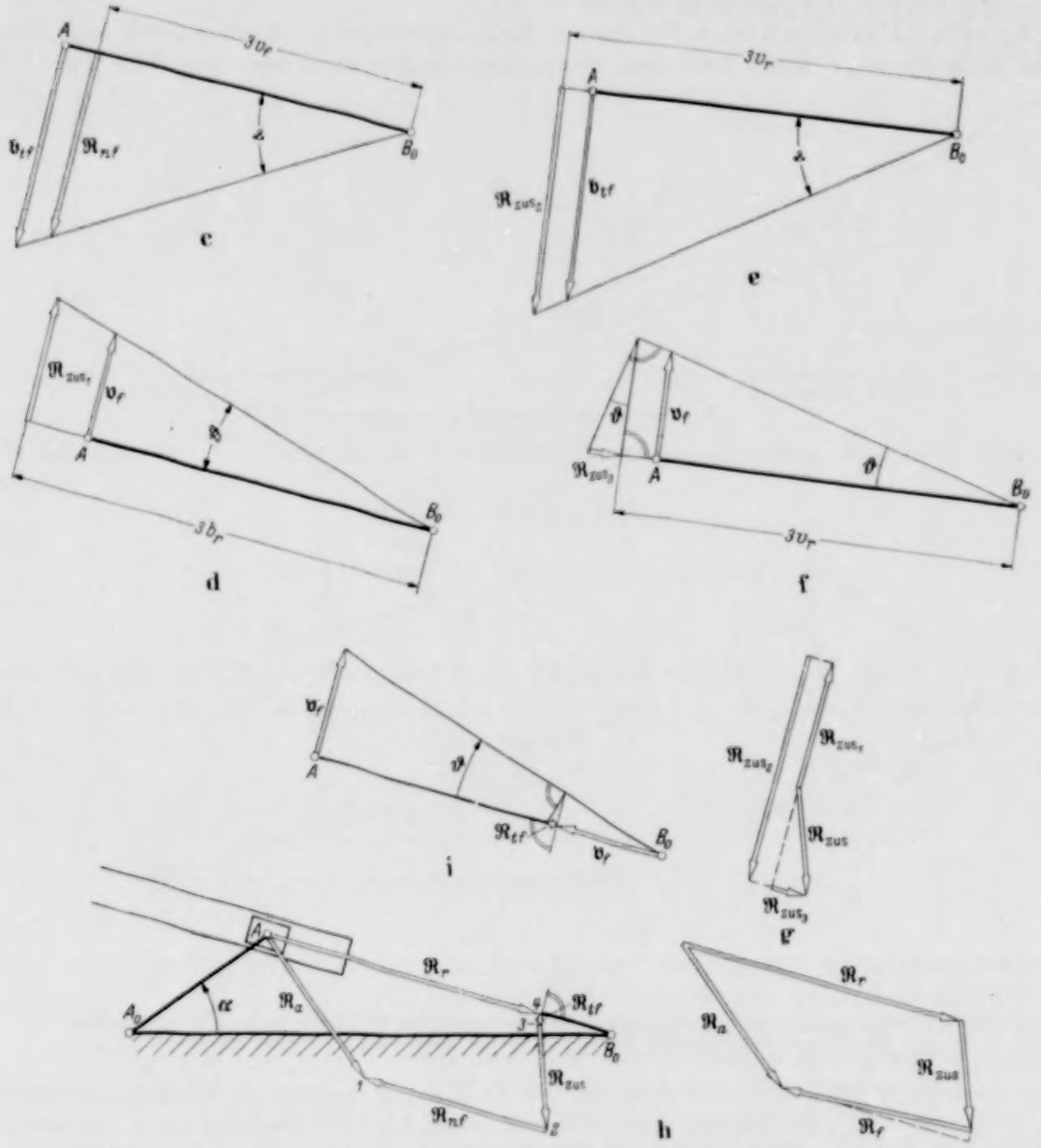


Abb. 11 c) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{nf} = 3 v_f \varepsilon_f^2$, d) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{zus\,1} = 3 b_r \omega_f^3$, e) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{zus\,2} = 3 v_r \varepsilon_f^2$, f) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{zus\,3} = 3 v_r \omega_f^3$, g) der Ruckvektor $\Re_{zus\,2}$, h) die Bestimmung des Ruckes nach dem erweiterten Satz von *Euler* für die Relativbewegung, i) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{tf} = v_f \omega_f^3$.

8. Beispiel: Elliptische Schleife. Ebenso wie im vorstehenden 7. Beispiel bei der zentrischen schwingenden Kurbelschleife (Abb. 11) kann auch bei einer zentrischen, schwingenden elliptischen Schleife[1] die Stellung des Antriebes gefunden werden, bei der die Winkelbeschleunigung des Abtriebes $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_f$ ein Maximum aufweist, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_f$ also demnach Null sein muß, Bild 12. Die Durchführung der Konstruktion, also die Ermittlung der Geschwindigkeiten, der Beschleunigungen und der Komponenten des Rucks erfolgt in gleicher Weise wie für die Kurbelschleife nach dem 7. Beispiel, während diesmal Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck des absolut bewegten Punktes A nach Abb. 4 der I. Mitteilung (vgl. dort Ziff. 3b) in gewohnter Weise gefunden wurden.

[1] Vgl. Fußnote 1 von Seite 77, erste und dritte Arbeit.

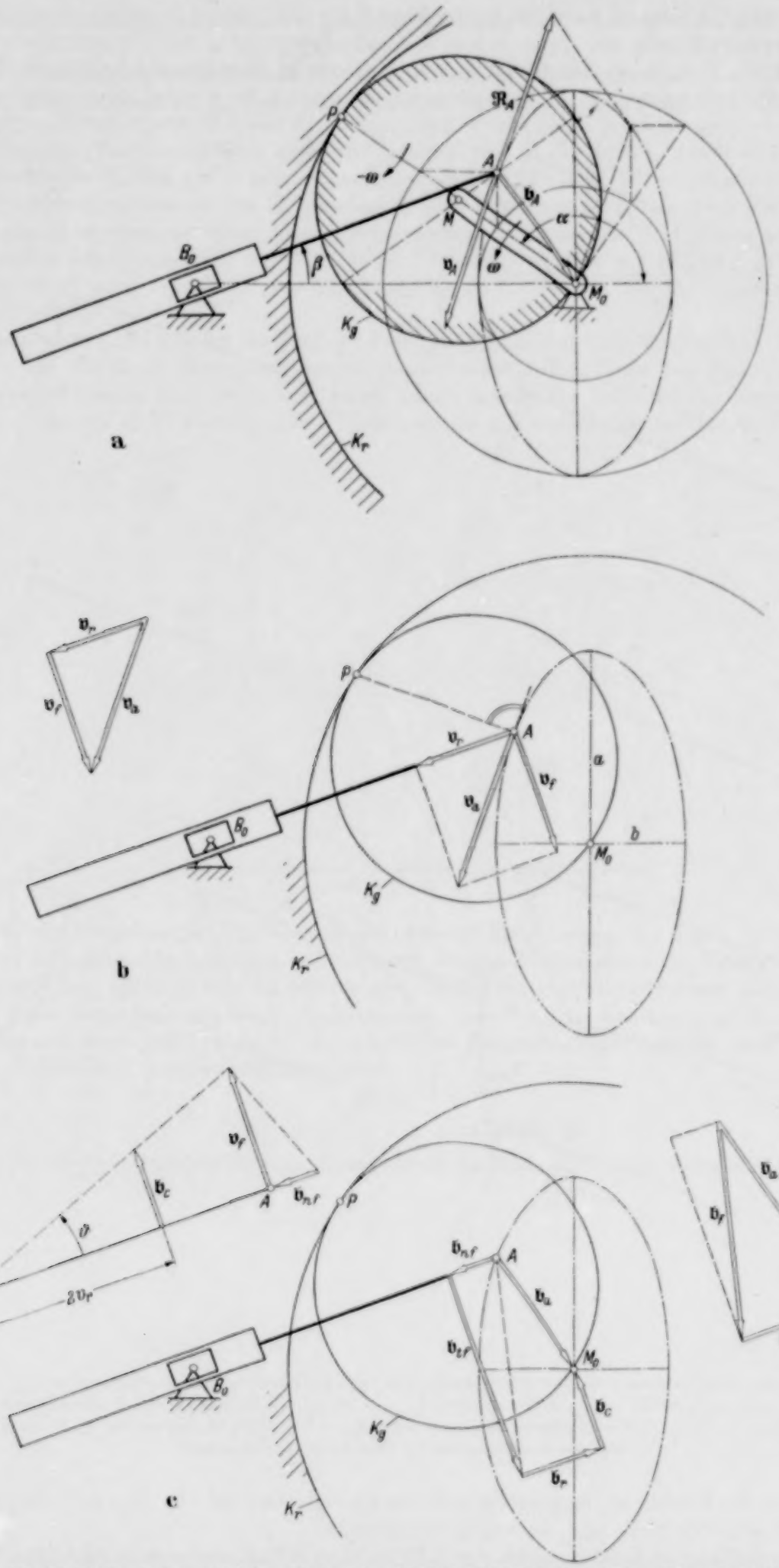


Abb. 12. Der Ruck einer zentrischen schwingenden elliptischen Schleife in ihrer Stellung für maximale Abtriebsbeschleunigung. a) Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck des Antriebes (durch ein Kardankreispaar verwirklicht), b) Bestimmung der Geschwindigkeiten, c) Bestimmung der Beschleunigungen.

Als eine der Möglichkeiten wird die Bahn des Punktes A, des Antriebes, durch das Kardankreispaar verwirklicht (Abb. 12a).

In Abb. 12b wurden die Geschwindigkeiten, in Abb. 12c die Beschleunigungen mit $\mathfrak{b}_e = 2\,\mathfrak{v}_{rel} \times \bar{\omega}_f$ ermittelt. Abb. 12d bis f zeigt die Komponenten des Ruckes $\mathfrak{R}_{zus}$, während in Abb. 12g und h die

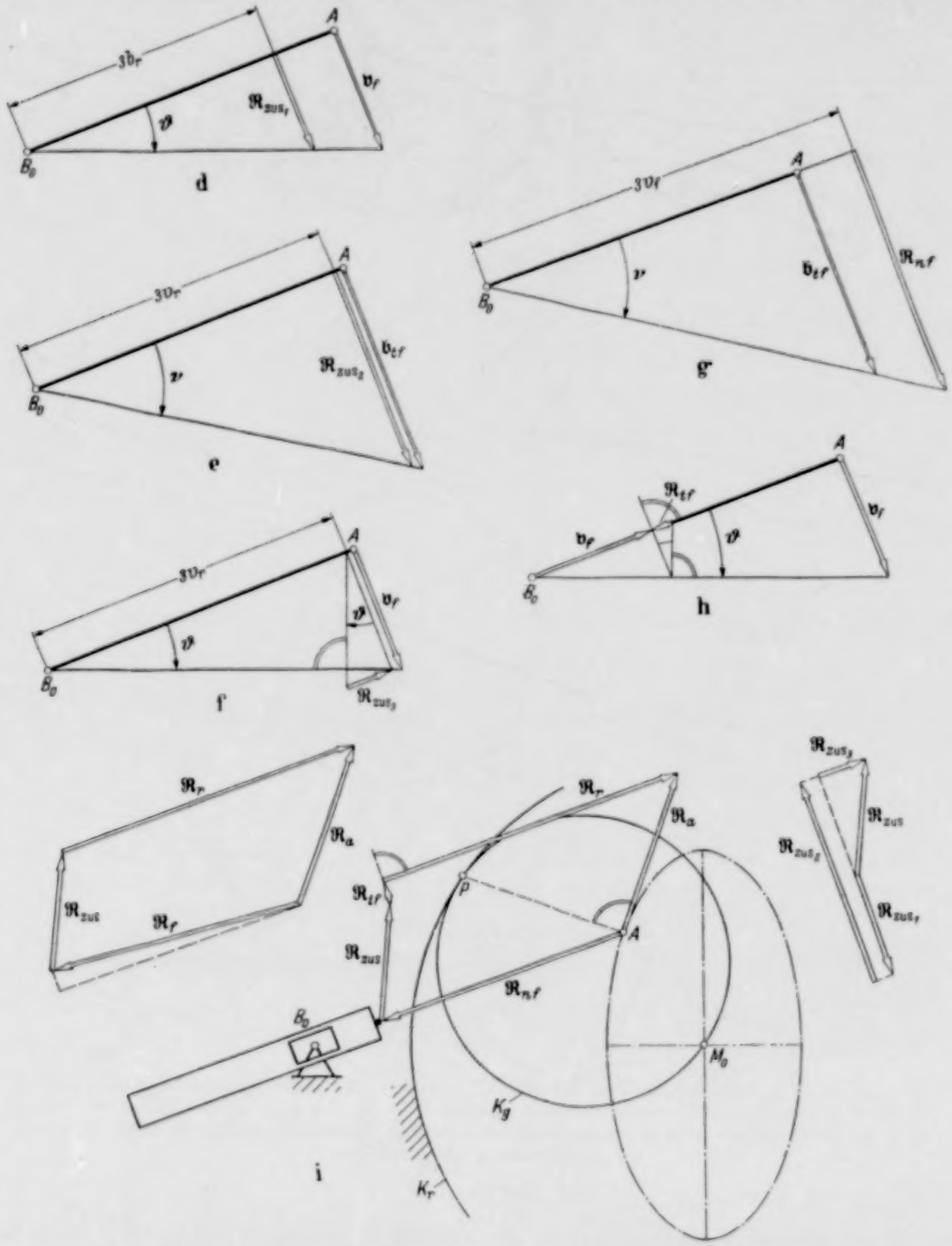


Abb. 12. d) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{zus\,1} = 3\,b_r\,\omega_f$, e) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{zus\,2} = 3\,v_r\,\varepsilon_f$ f) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{zus\,3} = 3\,v_r\,\omega_f^2$, g) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{nf} = 3\,v_f\,\varepsilon_f$, h) Bestimmung der Ruckkomponente $R_{tf} = 3\,v_f\,\omega_f^2$, i) die Bestimmung des Ruckes nach dem erweiterten Satz von *Euler* für die Relativbewegung.

Komponenten des Ruckes $\mathfrak{R}_f$ dargestellt sind. Im Besonderen wird hier $\mathfrak{R}_{tf} = (-)\,\mathfrak{v}_f\,\omega_f^2$ gefunden, da das Getriebe in der Stellung $\dot{\varepsilon}_f =$ Null gezeichnet ist.

Um diese Stellung in Anlehnung an das 2. Beispiel in Ziff. 4, also den zugehörigen Winkel α für das Kardankreispaar, zu finden, wird ähnlich wie dort in der Nähe des erwarteten Maximums für

ε der Wert $y = y_1/y_2$ mit $y_1 = R_{1f} = r_f(\dot{\varepsilon}_f - \omega_f^3)$ und $y_2 = r_f\omega_f^3$ (r_f = Strecke $\overline{AB_0}$) über dem Antriebswinkel α aufgetragen. Der Schnittpunkt der Kurve $y = y_1/y_2$, mit einer Parallelen $Y = -1$ zur Abszisse liefert, wie leicht einzusehen ist, denjenigen Winkel α, bei dem $\dot{\varepsilon}_f$ = Null, also die Winkelbeschleunigung des Abtriebes ε_f ein Extremum aufweist (Abb. 13). Die angegebene Konstruktion des Ruckes zur Auffindung der Stellung für maximale Abtriebswinkelbeschleunigung ist nur in der Nähe des erwarteten Maximums für ε notwendig, zumal $y = R_{1f}/r_f\,\omega_f^3$ sehr rasch sein Vorzeichen wechselt, der gesuchte Winkel α also sehr gut einzugrenzen ist. In Abb. 12i wurde für ein Minimum von ε_f die Ruckkonstruktion an der elliptischen Schleife durchgeführt, wie auch der zugehörige Winkel α in Abb. 13 angegeben wurde. Diese geometrische Konstruktion führt immer und schneller ans Ziel als analytische Verfahren, welche hier in diesem Sonderfall der elliptischen zentrischen Schleife für die Bedingung $\dot{\varepsilon} = 0$ auf eine Gleichung 10-ten Grades in cos α für den entsprechenden Antriebswinkel α führt.

6. Zusammenfassung. Es wurden für die Beschleunigungsänderung oder den Ruck $\mathfrak{R} = d\mathfrak{b}/dt$ unter Beschränkung auf die ebene Bewegung bei der Zweikurvenführung (Satz von *Euler*) und bei der Relativbewegung Formeln und Sätze aufgestellt, ferner wurde der Zustand der bewegten Ebene hinsichtlich des Ruckes in Erweiterung des Beschleunigungszustandes untersucht und auf weitere

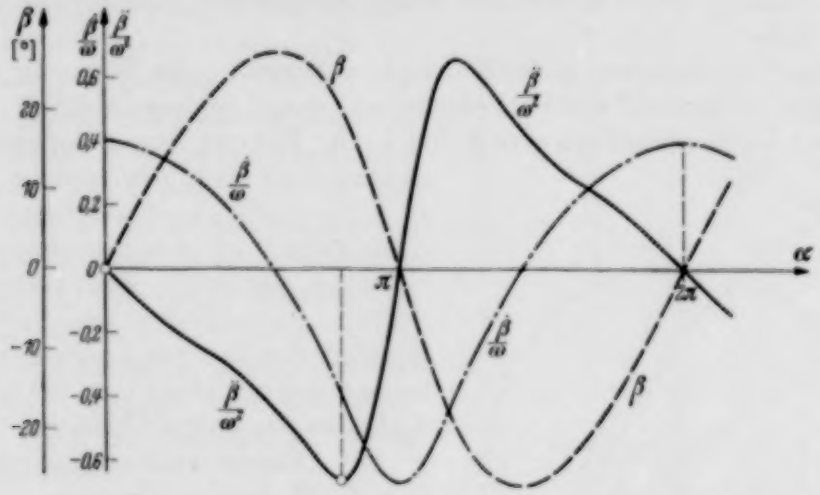


Abb. 13. Die Bewegungsgesetze des Abtriebes der elliptischen Schleife nach Abb. 12.

geometrische Örter hingewiesen. Die Beispiele dienten zur Erläuterung, vor allem aber zur Ermittlung der Extrema der Beschleunigungen in Getrieben. Da die Zeichenarbeit zur Ermittlung der Beschleunigungen selbst schon größer ist als die zur Geschwindigkeitsbestimmung, nimmt es nicht wunder, daß diese Arbeit bei dem Ruck als der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit noch wächst — „Differentiieren rauht auf"; aber die erforderlichen Konstruktionen benötigt man nur in wenigen Stellungen, und sie führen schnell zum Ziel.[1]

(Eingegangen am 21. April 1958.)

Anschrift des Verfasssers: Professor Dr.-Ing. *Walther Meyer zur Capellen*, Aachen, Technische Hochschule.

[1] Bei der Abfassung der Arbeit, insbesondere bei Herstellung der Abbildungen unterstützte mich sehr Herr cand. ing. *K. A. Rischen*, und es sei ihm an dieser Stelle für seine Mühen herzlichst gedankt.

Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen

Von G. Mitterlehner

1. Einleitung. Die Stabilität des fahrenden Kraftwagens gegen die von der Fahrbahn her und durch Luftkräfte bewirkten Störungen ist ein selten behandeltes Problem. Wie in der gesamten Dynamik des Kraftwagens ist es auch in diesem Fall schwierig, zu allgemein gültigen Lösungen zu gelangen. Der Grund dafür ist, daß das Kraftfahrzeug mit seinen zahlreichen Massen, Federn und Dämpfungselementen ein System von vielen Freiheitsgraden darstellt, das durch vereinfachende Voraussetzungen auf einige wenige Freiheitsgrade reduziert werden muß, bevor eine Berechnung gelingen kann. Durch verschiedene Voraussetzungen entstehen verschiedene Modelle des Kraftwagens, von denen jedes aus der Vielfalt der am Kraftwagen beobachteten Erscheinungen nur wenige wiedergeben kann. Trotzdem wurden damit brauchbare Ergebnisse erzielt, die die Entwicklung beeinflußt haben.

So hat *S. de Lavaud*[1] in mehreren gedankenreichen Arbeiten die Wirkung der gyroskopischen Kopplung zwischen dem „Flattern" der Vorderräder um ihre Lenkzapfen (Abb. 1) und dem „Trampeln" der gemeinsamen Vorderachse um eine Achse in der Fahrtrichtung aufgezeigt und der Einzelaufhängung der Vorderräder den Weg gebahnt. *H. Fromm*[2] berücksichtigte außerdem das „Schieben" der Vorderachse normal zur Fahrtrichtung, das infolge des Flatterns der Vorderräder entsteht. Die Fahreigenschaften sind durch den Wegfall der starren Vorderachse wesentlich verbessert worden, doch tritt bei sehr hohen Geschwindigkeiten weiterhin Flattern der Vorderräder auf.

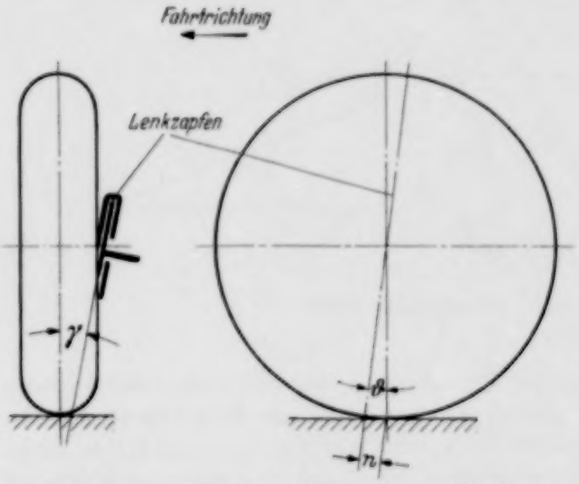


Abb. 1. Spreizung und Nachlauf der Lenkzapfen der Vorderräder.

Die Eigenschaften des Luftreifens wurden von *L. Huber*[3] untersucht. Unter Verwendung seiner Ergebnisse berechneten *P. Riekert* und *T. E. Schunck*[4] die Stabilität eines Systems, das neben dem „Schieben" des gesamten Fahrzeugs das „Gieren" um die Hochachse des Fahrzeuges berücksichtigt. Dabei wurden auch die Luftkräfte in die Rechnung einbezogen. Die Bewegung des Kraftwagens auf einer Kreisbahn wurde von denselben Verfassern und danach ausführlicher von *Paslay* und *Slibar*[5] behandelt, die auch den zusätzlichen Leistungsbedarf beim Durchfahren einer Kurve berechneten. Mit der Stabilität eines Fahrzeugs mit in der Geradeaus-Stellung blockierter starrer Lenkung gegenüber seitlichen Windstößen hat sich vor allem *W. Kamm*[6] befaßt.

2. Die Wirkung einer Unebenheit der Fahrbahn. Bei Überfahren eines kleinen Einzelhindernisses der Fahrbahn durch ein Vorderrad des Kraftwagens entsteht im allgemeinen ein Moment der Stoßkraft, das die durch die Spurstange verbundenen Vorderräder um ihre Lenkzapfen zu verdrehen sucht. Dieselbe Stoßkraft auf den Lenkzapfen übertragen hat Momente um alle drei Trägheitshauptachsen des Fahrzeuges, von denen je eine mit der Längs-, Quer- und Hochachse zusammenfallen soll. Der Einfluß des Moments um die Längsachse wird durch die Federung des Vorderrades verkleinert, und der Einfluß des Moments um die Querachse ist von vornherein unbeachtlich. Das Moment der Stoßkraft um die Hochachse des Fahrzeugs verhält sich zu dem um den Lenkzapfen

[1] *Sensaud de Lavaud*, Les vitesses critiques d'une voiture automobile und „Causerie scientifique", beide im Selbstverlag des Verfassers Paris 1927.

[2] *Becker, Fromm, Maruhn*, Schwingungen im Automobillenkungen, Berlin 1931.

[3] *L. Huber*, Die Fahrtrichtungstabilität des schnellfahrenden Kraftwagens. Deutsche Kraftfahrtforschung, Heft 44, Berlin 1940.

[4] *P. Riekert* und *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 210.

[5] *P. R. Paslay* und *A. Slibar*, Ing.-Arch. 24, (1956) S. 412.

[6] *W. Kamm*, Automobiltechn. Z. 56 (1954) S. 117.

des Vorderrades wie die jeweiligen Kraftarme und ist infolge der Spreizung (Abb. 1) des Lenkzapfens mindestens 20 mal so groß wie das letztere. Die Drehmasse des Fahrzeugs um seine Hochachse ist dagegen etwa 1000 mal so groß wie die des Vorderrades um den Lenkzapfen, so daß nur das Einschlagen der durch die Spurstange verbundenen Vorderräder mit seinen Folgen und nicht der reduzierte exzentrische Stoß um die Hochachse gefährlich werden kann.

Das Fahrzeug wird als lineares System mit drei Freiheitsgraden-Flatterschwingung der Vorderräder, seitliche Schiebung und Gierschwingung um die Hochachse des gesamten Fahrzeugs — angenähert dargestellt. Das Ziel ist das Aufsuchen der Stabilitätsgrenzen und eine Berechnung des sog. Nachlaufes der Vorderräder (n in Abb. 1), welcher ausreicht, um ein gegebenes Fahrzeug gegen Störungen zu stabilisieren, die von kleinen Unebenheiten der Fahrbahn ausgehen.

Das Wanken des Aufbaus um seine Längsachse soll als vierter Freiheitsgrad des Systems in einer späteren Untersuchung mitbehandelt werden.

3. Die Stellung der Lenkzapfen der Vorderräder und der Schräglauf der Luftreifen. Der Lenkzapfen eines Vorderrades steht weder parallel zur Radebene, noch liegt er in der lotrechten Meridianebene des Rades (Abb. 1). Die erste Eigenschaft, die Spreizung, hält das Moment der oben erwähnten Stoßkraft um den Lenkzapfen klein, kann es aber wegen der Reifenbreite nicht ganz zum Verschwinden bringen. Die zweite Eigenschaft, der Nachlauf — der Schnittpunkt des lotrechten Raddurchmessers mit der Fahrbahn folgt in der Fahrtrichtung dem Schnittpunkt des Lenkzapfens mit der Fahrbahn nach — bewirkt ein Moment der beim Einschlagen des Rades auftretenden Seitenkraft S (Abb. 2) um den Lenkzapfen, das das Rad in seine Geradeaus-Stellung zurückzuführen sucht. Nachlauf und Spreizung werden gewöhnlich als Winkel angegeben, im folgenden wird jedoch als Nachlauf n der Kraftarm der Seitenkraft S um den Lenkzapfen bezeichnet.

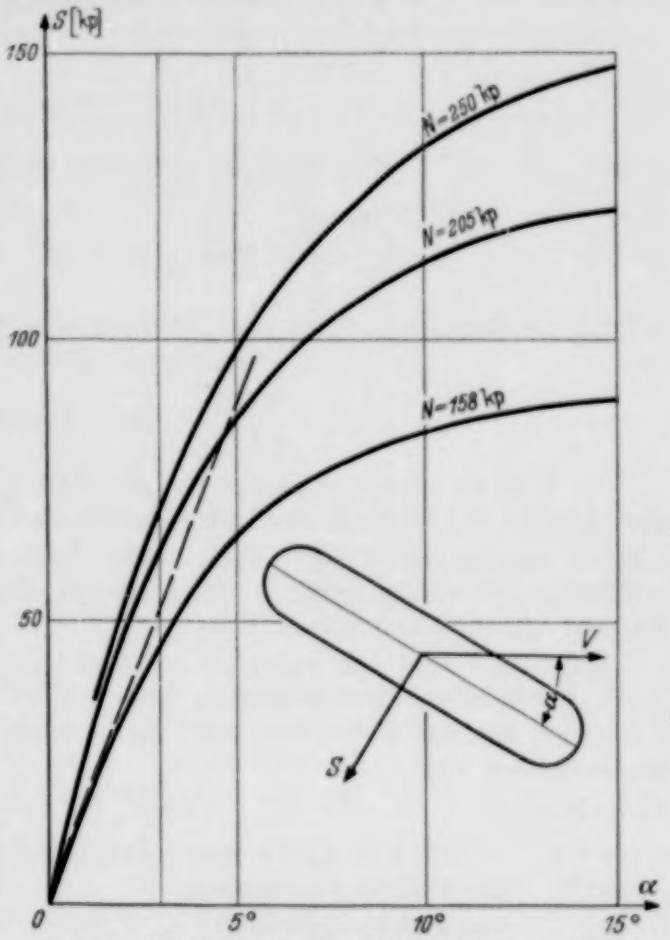


Abb. 2. Seitenkraft über dem Schräglaufwinkel für verschiedene Radlasten nach *L. Huber*.

Nach ausgedehnten Versuchen kam *L. Huber* zu dem Ergebnis, daß ein luftbereiftes Rad eine Seitenkraft nur dann von der Fahrbahn auf das Fahrzeug übertragen kann, wenn die Radebene mit der fortschreitenden Geschwindigkeit des Rades den sogenannten Schräglaufwinkel α einschließt. Abb. 2 zeigt den Zusammenhang zwischen Seitenkraft und Schräglaufwinkel bei verschiedenen Radlasten. Die Fahrgeschwindigkeit hat auf diese Ergebnisse nur wenig Einfluß, doch scheint bei kleinen Schräglaufwinkeln die Seitensteifigkeit des luftbereiften Rades mit wachsender Geschwindigkeit abzunehmen.

4. Voraussetzungen. Im folgenden wird die Seitenkraft der Radlast N und dem Schräglaufwinkel proportional angesetzt:

$$S = k_0 N \alpha = k \alpha .$$

Die entsprechende Gerade für $N = 200$ kp in Abb. 2 zeigt, daß der daraus entstehende Fehler bis zu $\alpha = 5°$ tragbar erscheint. Damit sind die Grenzen gegeben, innerhalb der das Problem linear behandelt werden kann, wenn auch bereits in diesem Bereich eine bessere Anpassung an die Versuchsergebnisse wünschenswert wäre.

Wegen der Beschränkung der Schräglaufwinkel können die Spuren der Räder auf der Fahrbahn nur schwach gekrümmt sein, so daß die Spuren des rechten und des linken Vorderrades einander gleich angenommen werden können. Dasselbe gilt für die Spuren des rechten und des linken Hinterrades.

Wegen der Kleinheit der Winkel können die Komponenten normal zur Fahrtrichtung der in den Radebenen wirkenden Kräfte, d. i. der Schubkräfte der Treibräder und der Rollwiderstände aller Räder vernachlässigt werden. Durch die Drehung der Räder um ihre Achsen entstehen beim

Gieren des Fahrzeugs um seine Hochachse und beim Einschlagen der Vorderräder Kreiselmomente um die Längsachse des Fahrzeugs. Sie tragen zum Trampeln der Achsen, dem sogenannten „Shimmy" bei, das beim Übergang von Hochdruck- auf Niederdruckreifen zusammen mit dem Flattern der Vorderräder erstmals stärker hervortrat und von *S. deLavaud* und *H. Fromm* ausführlich behandelt wurde. Ihr Einfluß auf die Radlastverteilung ist wegen der Kleinheit der Drehmassen der Räder und ihrer Drehgeschwindigkeiten um Hochachse bzw. Lenkzapfen bei nicht zu hohen Fahrgeschwindigkeiten gering und kann in dem gewählten System nicht aufscheinen. Dies ist einer der Gründe, die für eine Ergänzung des Systems durch das Wanken als viertem Freiheitsgrad sprechen.

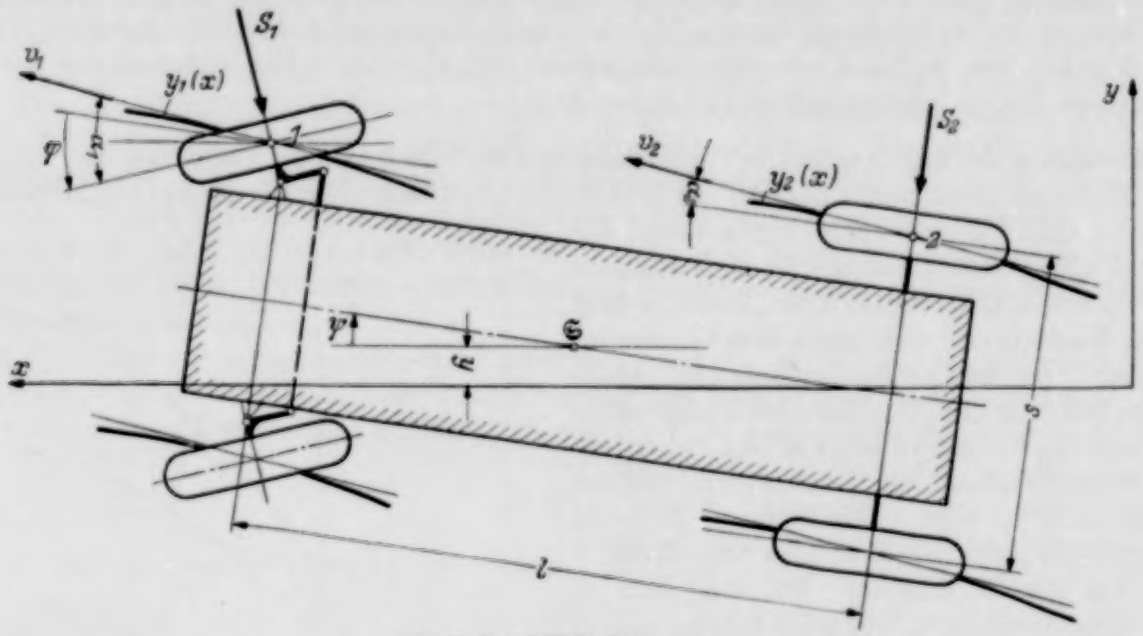


Abb. 3. Grundriß des Fahrzeugs.

Die Radlast wurde zunächst für alle Räder einem Viertel des Fahrzeugsgewichts gleichgesetzt und danach der Einfluß des Luftwiderstandes auf die Verteilung der Radlasten auf Vorder- und Hinterräder berücksichtigt. Eine andere Aufteilung der statischen Radlasten bringt keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, macht aber die Rechnung durch das Auftreten zahlreicher weiterer Konstanten unübersichtlich.

5. Verwendete Bezeichnungen. Abb. 3 zeigt einen Grundriß des Fahrzeugs und der Spuren der Räder auf der Fahrbahn, wobei die Krümmung der Spuren und die Größe der Winkel übertrieben eingezeichnet sind.

Es bedeuten:

C [$m^{-1} s^2$] $= m/4k = I_Z/l^2 k$ den „Trägheitsbeiwert";
g [ms^{-2}] die Erdbeschleunigung;
G [kp] das Fahrzeuggewicht;
i [1] $= \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit;
I_φ [kgm^2] die Drehmasse eines Vorderrades um seinen Lenkzapfen;
I_Z [kgm^2] die Drehmasse des Fahrzeugs um seine Hochachse;
k_0 [1] die Seitensteifigkeit eines Rades bei 1 kp Radlast;
k [kp] $= k_0 G/4$ die Seitensteifigkeit eines Rades bei der statischen Radlast,
k_φ [kpm] den Rückstellbeiwert der Lenkung;
l [m] den Radstand;
m [kg] die Fahrzeugmasse;
n [m] den Nachlauf der Vorderräder;
N [kp] die Radlast;
s [m] die Spurweite;
S_1, S_2 [kp] die Seitenkraft am Vorderrad, bzw. am Hinterrad;
t [s] die Zeit;
v [ms^{-1}] die Fahrgeschwindigkeit;
x [m] die Schwerpunktskoordinate in der Fahrtrichtung vom ortsfestem System;
y [m] die Schwerpunktskoordinate der Seitenschiebung von ortsfesten System;
y_1, y_2 [m] die Koordinaten der Bodenberührungspunkte von Vorder- bzw. Hinterrad.

α_1, α_2 [1] die Schräglaufwinkel des Vorderrades, bzw. des Hinterrades;
γ [1] die Spreizung;
δ [1] den Nachlaufwinkel;
φ [1] den Lenkwinkel;
ψ [1] der Gierwinkel;
ν [s^{-1}] die Kreisfrequenz;
σ [s^{-1}] das Argument der charakteristischen Gleichung;
$\xi(v)$ [1] $= \Delta N/N$ die Änderung der Radlast durch den Luftwiderstand.

Die Differentiation nach der x Koordinate wird durch Striche, die Differentiation nach der Zeit durch Punkte bezeichnet. Der Schnittpunkt des lotrechten Raddurchmessers mit der Fahrbahn wird Bodenberührungspunkt genannt.

6. Die Bewegungsgleichungen für das Fahrzeug. In Abb. 3 sind die Radspuren als Funktionen $y(x)$ des Fahrweges eingezeichnet. Da man wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Winkel $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$ und wegen der schwachen Krümmung der Radspuren $1/\varrho \approx y''$ setzen kann, ergeben sich der Schwerpunktsatz in der Richtung der Kurvennormalen und der Momentensatz um die Hochachse zu

$$-m\,y''\,v^2 = 2\,(S_1 + S_2) = 2\,k\,(\alpha_1 + \alpha_2)\,, \qquad -I_z\,\ddot{\psi} = 2\,(S_1 - S_2)\,l/2 = k\,l\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,. \tag{1}$$

Die Neigung der Radspuren in den Bodenberührungspunkten der Räder ist y_1', bzw. y_2'. Damit wird

$$\alpha_1 = y_1' - \frac{y_1 - y_2}{l} + \varphi\,, \qquad \alpha_2 = y_2' - \frac{y_1 - y_2}{l}\,. \tag{2}$$

Wird im Argument der Weg durch die Zeit ersetzt und y_1, bzw. y_2 durch die Seitenschiebung des Schwerpunkts y und die Gierwinkel ψ ausgedrückt, so folgt annähernd

$$y_1 \approx y + s/2 + \psi\,l/2\,, \qquad y_2 \approx y + s/2 - \psi\,l/2\,,$$
$$\dot{y}_1 \approx \dot{y} + \dot{\psi}\,l/2\,, \qquad \dot{y}_2 \approx \dot{y} - \dot{\psi}\,l/2$$

sowie $\dot{y}_1 \approx y_1'\,\dot{x} \approx y_1'\,v\,, \quad \dot{y}_2 \approx y_2'\,v\,, \quad \ddot{y} \approx y''\,\dot{x}^2 \approx y''\,v^2\,.$

Damit wird aus (1)

$$-m\,\ddot{y} = 2\,k\left(\frac{2}{v}\,\dot{y} - 2\,\psi + \varphi\right), \qquad -I_z\,\ddot{\psi} = 2\,k\,\frac{l}{2}\left(\frac{1}{v}\,l\,\dot{\psi} + \varphi\right). \tag{1a}$$

Unter der Annahme, daß die Fahrzeugmasse in zwei Punkten zwischen den Radpaaren konzentriert werden kann[1], wird $I_z = m\,l^2/4$.

Mit

$$C = \frac{m}{4\,k} = \frac{I_z}{l^2\,k} = \frac{m}{4\,k_0\,G/4} = \frac{1}{k_0\,g}$$

vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$C\,\ddot{y} + \frac{1}{v}\,\dot{y} - \psi + \frac{\varphi}{2} = 0\,, \qquad C\,l\,\ddot{\psi} + \frac{l}{v}\,\dot{\psi} + \varphi = 0\,, \tag{1b}$$

worin als Konstante nur die Fahrzeuggeschwindigkeit, der Radstand und der „Trägheitsbeiwert" C vorkommen, der durch die Reifeneigenschaften bestimmt ist.

Da die Gleichungen (1b) den Lenkwinkel φ enthalten, tritt zu ihnen noch die Bewegungsgleichung der Vorderräder um ihre Lenkzapfen, die zunächst möglichst einfach an gesetzt wird.

7. Elastische Bindung der Vorderräder an ihre Geradeaus-Stellung. Unter der Annahme stationärer Vorwärtsbewegung des Lenkzapfens und bei Vernachlässigung der Normalbeschleunigung kommt mit der Drehmasse I_φ eines Vorderrades um seinen Lenkzapfen zu (1b) noch

$$2\,I_\varphi\,\ddot{\varphi} + k_\varphi\,\varphi = 0\,. \tag{1c}$$

Da darin die anderen Koordinaten y und ψ nicht vorkommen, beeinflußt zwar die freie ungedämpfte Schwingung der Vorderräder die Bewegung des Fahrzeugs, letztere hat aber in erster Näherung keinen Einfluß auf das Lenksystem. Erst die später vorzunehmende Einführung des Nachlaufes wird diese einseitige Kopplung in eine beiderseitige verwandeln. Tatsächlich tritt allerdings schon durch die Reibung im Lenkzapfen eine weitere Kopplung hinzu.

[1] Wenn man diese Annahme wegläßt und allgemein $I_z = \mu\,\frac{m\,l^2}{4}$, $\mu \neq 1$ setzt, ändert sich die Form der Endergebnisse nur wenig (s. dort).

Wenn die drei Gleichungen (1b) und (1c) miteinander verträglich sein sollen, muß ihre Koeffizientendeterminante verschwinden. Mit den Ansätzen

$$y = y_0 e^{\sigma t}, \qquad \psi = \psi_0 e^{\sigma t}, \qquad \varphi = \varphi_0 e^{\sigma t}$$

kommt

$$\begin{vmatrix} \left[C\sigma^2 + \frac{1}{v}\sigma\right] & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \left[Cl\sigma^2 + \frac{l}{v}\sigma\right] & 1 \\ 0 & 0 & [2 I_\varphi \sigma^2 + k_\varphi] \end{vmatrix} = 0 . \tag{3}$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung sechsten Grades in σ

$$a_0 \sigma^6 + a_1 \sigma^5 + a_2 \sigma^4 + a_3 \sigma^3 + a_4 \sigma^2 + a_5 \sigma + a_6 = 0 \tag{4}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= C^2 l \cdot 2 I_\varphi, & a_1 &= \frac{2Cl}{v} \cdot 2 I_\varphi, & a_2 &= C^2 l k_\varphi + \frac{l}{v^2} 2 I_\varphi, \\ a_3 &= \frac{2Cl}{v} k_\varphi, & a_4 &= \frac{l}{v^2} k_\varphi, & a_5 &= a_6 = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dieses System erfüllt nicht die *Hurwitz*sche Stabilitätsbedingung durchweg positiver a_i. Streng genommen ist die gesamte Bewegung des Fahrzeugs weder stabil, noch stabilisierbar, da in (1b) bzw. (3) bei den Koordinaten y und ψ die Rückstellglieder fehlen. Das bedeutet, daß weder der Schwerpunkt des Fahrzeugs an die x-Achse in Abb. 3, noch die Richtung seiner Längsachse an die x-Richtung als Mittellagen gebunden sind. Wäre das anders, so wäre das Fahrzeug nicht lenkbar, da ja dann auch ein Einschlagen der Vorderräder durch den Lenker diese Bindungen nicht aufheben könnte.

Die Rückstellzahl der Lenkung k_φ ist sehr klein bei großer Elastizität des Lenkgestänges oder direkter Lenkung, und kann bei starrem Lenkgestänge und hoher Lenkübersetzung ziemlich groß werden[1]. Man soll daher das Rückstellen der Lenkung möglichst nicht der veränderlichen Elastizität des Lenkgestänges überlassen.

8. Zur Definition der „Lenkstabilität". Das Auffinden sämtlicher Lösungen der charakteristischen Gleichung (4) ist hier auf ganz elementarem Wege möglich. Aus (1c) folgt, daß die Eigenfrequenz der Lenkung $\nu = \sqrt{k_\varphi / 2 I_\varphi}$ auch eine Eigenfrequenz des Systems (3) sein muß, so daß

$$\sigma_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k_\varphi}{2 I_\varphi}} \tag{6}$$

das erste Lösungspaar ist, da in algebraischen Gleichungen komplexe Lösungen stets konjugiert auftreten.

Da man außerdem Gleichung (4) durch σ^2 kürzen kann, kommt dazu die Doppelwurzel $\sigma_{5,6} = 0$.

Wenn man schließlich aus den bereits gefundenen Lösungen die Linearfaktoren bildet und durch deren Produkt $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)\sigma^2$ die Gleichung (4) dividiert, so kommt

$$\left(C\sigma + \frac{1}{v}\right)^2 2 I_\varphi l = 0$$

und damit die Doppelwurzel

$$\sigma_{3,4} = -\frac{1}{Cv} .$$

Die allgemeine Lösung des Systems (3), z. B. für die Koordinate y angeschrieben, lautet dann

$$y = b_1 e^{i\sqrt{\frac{k_\varphi}{2 I_\varphi}} t} + b_2 e^{-i\sqrt{\frac{k_\varphi}{2 I_\varphi}} t} + b_3 e^{-\frac{1}{Cv} t} + b_4 t e^{-\frac{1}{Cv} t} + b_5 + b_6 t . \tag{7}$$

Die Glieder mit dem reellen negativen Exponenten klingen rasch ab und brauchen ebenso wie das absolute Glied nicht berücksichtigt zu werden. Die ersten beiden Glieder ergeben eine ungedämpfte Schwingung mit der Eigenfrequenz der Lenkung und das letzte Glied eine Seitenschiebung mit konstanter Geschwindigkeit.

Für die Koordinate ψ gilt das entsprechende, hier stellt das letzte Glied eine Drehung des Fahrzeugs um seine Hochachse mit konstanter Drehgeschwindigkeit dar. Man erkennt in den

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 88.

sechsten Gliedern den Einfluß des zu Beginn der Arbeit erwähnten exzentrischen Stoßes auf den in der Fahrtrichtung starr mit dem Fahrzeug verbundenen Lenkzapfen. So klein dieser direkte Einfluß auch ist, so kann er nur durch das Eingreifen des Lenkers ausgeglichen werden, dem dazu genügend Zeit zur Verfügung steht.

Ein zweiter Drehstoß um die Hochachse erfolgt, wenn das Hinterrad dieselbe Unebenheit überfährt. Auch auf guter Fahrbahn überfahren alle vier Räder ständig sehr kleine Unebenheiten, so daß sich die erhaltenen Drehimpulse nahezu aufheben, bzw. nur langsam summieren. Auf jeden Fall verhindert die große Drehmasse des Fahrzeugs um seine Hochachse eine schnelle Änderung der Fahrtrichtung.

Viel gefährlicher ist der indirekte Einfluß des Drehstoßes um den Lenkzapfen eines Vorderrades, da bei der geringen Drehmasse des Lenksystems sein Einschlag verhältnismäßig groß wird und dadurch die großen Trägheitskräfte der gesamten Fahrzeugmasse ins Spiel bringt.

Ein Fahrzeug soll demnach schon dann als stabil angesehen werden, wenn der durch eine kleine Störung verursachte Einschlag des Lenksystems aperiodisch oder unter gedämpfter Schwingungen zurückgeht. Außerdem dürfen die durch den Einschlag der Lenkung ausgelösten Bewegungen des ganzen Fahrzeugs, die gleichzeitig und in ähnlicher Weise ablaufen, keine zu großen Amplituden erreichen. Es ist leicht genug, die erste Bedingung allein zu erfüllen, doch ist die Erfüllung der zweiten Bedingung praktisch viel wichtiger, wie der folgende Abschnitt zeigt.

9. Berechnung der stationären Amplituden. Nachdem in Gleichung (7) für die Stabilitätsbetrachtung nur die rein imaginären Lösungen übrigbleiben, führt das Fahrzeug nach einem sehr kurzen Einschwingsvorgang harmonische Schiebe- und Gierschwingungen mit der Kreisfrequenz des Lenksystems $\nu = \sqrt{k_\varphi / 2\, I_\varphi}$ aus. Ihre Amplituden y_0, ψ_0 und Phasenlagen Φ, χ gegenüber dem Lenksystem können mit den Ansätzen

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\nu t)\,, \qquad y = y_0 \sin(\nu t - \Phi)\,, \qquad \psi = \psi_0 \sin(\nu t - \chi)$$

durch Koeffizientenvergleich errechnet werden. Nach Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (1b) kommt:

$$\left.\begin{aligned} -C\nu^2 y_0 \sin(\nu t - \Phi) + \frac{1}{v}\nu y_0 \cos(\nu t - \Phi) - \psi_0 \sin(\nu t - \chi) + \frac{\varphi_0}{2}\sin \nu t = 0\,, \\ -C l \nu^2 \psi_0 \sin(\nu t - \chi) + \frac{l}{v}\nu \psi_0 \cos(\nu t - \chi) + \psi_0 \sin \nu t = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Da in beiden Gleichungen die Summe des Glieder mit $\sin \nu t$, bzw. der Glieder mit $\cos \nu t$ für sich verschwinden muß, folgt für die Koeffizienten:

$$-C\nu^2 y_0 \cos\Phi + \frac{1}{v}\nu y_0 \sin\Phi - \psi_0 \cos\chi + \frac{\varphi_0}{2} = 0\,, \tag{I}$$

$$C\nu^2 y_0 \sin\Phi + \frac{1}{v}\nu y_0 \cos\Phi + \psi_0 \sin\chi = 0\,, \tag{II}$$

$$-C l \nu^2 \psi_0 \cos\chi + \frac{l}{v}\nu \psi_0 \sin\chi + \varphi_0 = 0\,, \tag{III}$$

$$C l \nu^2 \psi_0 \sin\chi + \frac{l}{v}\nu \psi_0 \cos\chi = 0\,. \tag{IV}$$

Aus (IV) ergibt sich

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{1}{C\nu v}\,. \tag{9}$$

Wenn man (III) und (IV) quadriert und addiert erhält man die Amplitude des Gierens

$$\psi_0 = \frac{v\varphi_0}{l\nu\sqrt{(C\nu v)^2 + 1}}\,. \tag{10}$$

Sie ist für große v von der Geschwindigkeit praktisch unabhängig (Abb. 4); großer Radstand und hohes ν sind günstig, da der Radstand hier die Frequenz nicht beeinflußt.

Durch Quadrieren und Addieren von (I) und (II) ergibt sich mit $\cos\chi$ aus (9) die Amplitude der Seitenschiebung des Schwerpunkts zu

$$y_0 = \frac{v\varphi_0}{2 l \nu^2 u}\sqrt{4\nu^2 w + l^2 \nu^2 u}\,, \tag{11}$$

worin

$$u = [(C\nu v)^2 + 1]\,, \qquad w = 1 - l\nu^2 C$$

ist. Ihr in Abb. 5 eingezeichneter Verlauf kann, wie folgt, gedeutet werden: Ohne Schräglauf der Räder müßten bei einer bestimmten Frequenz der Lenkung die Amplituden der Vorderräder und damit auch die des Schwerpunkts y_0 etwa proportional mit der Fahrgeschwindigkeit wachsen. Ein ähnlicher Verlauf zeigt sich aber nur bei langsamer Schwingung des Lenksystems und kleiner Fahrgeschwindigkeit, während bei größerem ν und v infolge der steigenden Massenkräfte große Schräglaufwinkel auftreten, die die Wellen der Radspuren und der Schwerpunktsbahn stark abflachen.

Es zeigt sich hier deutlich, daß eine genügend hohe Frequenz der Lenkschwingung viel wichtiger ist, als ihre starke Dämpfung. Trotz des ungedämpften Lenksystems ist das Verhalten des Fahrzeugs als durchaus stabil zu bezeichnen, solange $\nu \geqq 6{,}28\ s^{-1}$ ist. Der Grund, warum die elastische Bindung der Vorderräder an ihre Geradeaus-Stellung nicht zur Stabilisierung verwendet wird liegt wohl darin, daß eine zur Erzielung eines hohen ν genügend harte Feder das starke Einschlagen der Räder bei langsamer Fahrt zu sehr erschwert.

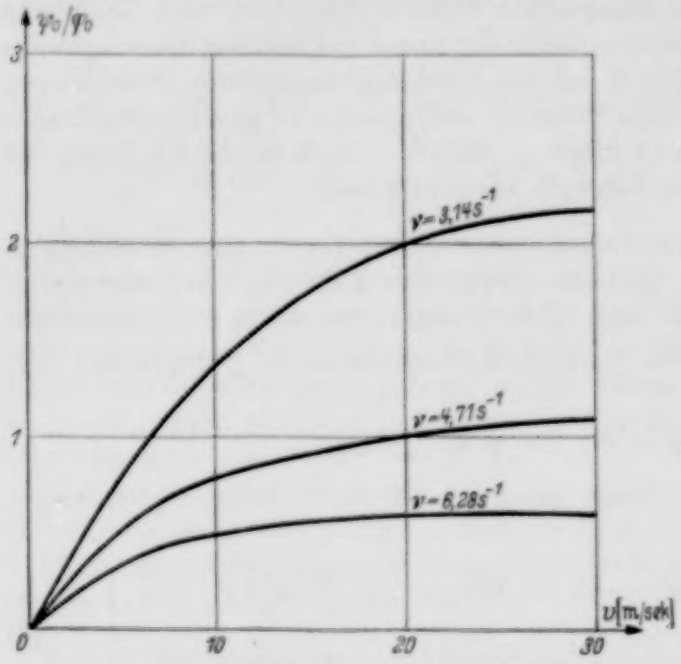


Abb. 4. Gieramplituden bei ungedämpfter Lenkschwingung.

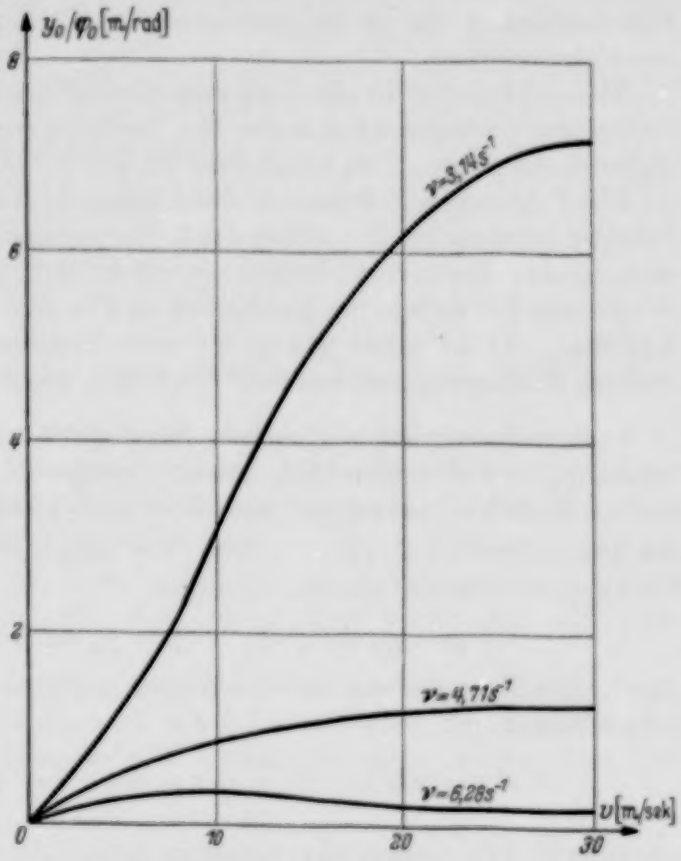


Abb. 5. Amplituden der Seitenschiebung bei ungedämpfter Lenkschwingung.

Für Sonderzwecke, wie z. B. die Sicherung eines extrem schnellen Fahrzeugs gegen seitliche Windstöße, dürfte die elastische Bindung in Betracht kommen, da in diesem Fall der Nachlauf zumindest zu Beginn der Störung, eine recht bedenkliche Wirkung hat, wie noch später näher ausgeführt werden soll.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch der Phasenwinkel zwischen Lenk- und Schiebeschwingung angeführt:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{-\frac{C\nu}{v} \pm \sqrt{K\left(\frac{1}{v^2} + C^2\nu^2 + K\right)}}{C^2\nu^2 - K} \tag{12}$$

mit

$$K = \frac{4}{\nu^2\,(4\,\nu^2\,w + l^2\,\nu^2\,u)}$$

Das doppelte Vorzeichen in (12) führt nicht auf zwei verschiedene Amplituden. Die Phasenverschiebung zwischen Schieben und Gieren ist in beiden Fällen die gleiche, es ändert sich nur die Reihenfolge.

10. Der Nachlauf der Vorderräder. Werden die Lenkzapfen so geneigt, daß ihre Mittellinien die Fahrbahn vor den Berührungspunkten der Vorderräder treffen, so erhalten die Seitenkräfte S auf die eingeschlagenen Räder Momente um die Lenkzapfen, die dem Einschlag entgegenwirken. Abb. 6 zeigt eine vereinfachte Darstellung dieses Sachverhalts.

Für ein Vorderrad wird das Rückstellmoment um den Lenkzapfen wegen (2)

$$n\,S_1 = n\,k\,\alpha_1 = n\,k\left(y_1' - \frac{y_1 - y_2}{l} + \varphi\right) = n\,k\left[\frac{1}{v}\left(\dot{y} + \frac{l}{2}\,\dot{\psi}\right) - \psi + \varphi\right]. \tag{13}$$

Mit $I_\varphi\,\ddot{\varphi} + n\,k\,\alpha_1 = 0$ und (13) kommt das System

$$\left.\begin{aligned} C\,\ddot{y} + \frac{1}{v}\,\dot{y} - \psi + \frac{\varphi}{2} &= 0\,, \\ C\,l\,\ddot{\psi} + \frac{l}{v}\,\dot{\psi} + \varphi &= 0\,, \\ \frac{I_\varphi}{n\,k}\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{v}\,\dot{y} + \frac{l}{2\,v}\,\dot{\psi} - \psi + \varphi &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

dessen Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \left[C\,\sigma^2 + \frac{1}{v}\,\sigma\right] & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & \left[C\,l\,\sigma^2 + \frac{l}{v}\,\sigma\right] & +1 \\ \frac{1}{v}\,\sigma & \left[\frac{l}{2\,v}\,\sigma - 1\right] & \left[\frac{I_\varphi}{n\,k}\,\sigma^2 + 1\right] \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

sein muß. Daraus folgt die charakteristische Gleichung sechsten Grades in σ

$$a_0\,\sigma^6 + a_1\,\sigma^5 + a_2\,\sigma^4 + a_3\,\sigma^3 + a_4\,\sigma^2 + a_5\,\sigma + a_6 = 0\,, \tag{16}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= C^2\,l\,\frac{I_\varphi}{n\,k}\,, \quad a_1 = \frac{2\,C\,l}{v}\,\frac{I_\varphi}{n\,k}\,, \quad a_2 = C^2\,l + \frac{l}{v^2}\,\frac{I_\varphi}{n\,k}\,, \\ a_3 &= \frac{C\,l}{v}\,, \quad a_4 = C\,, \quad a_5 = a_6 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

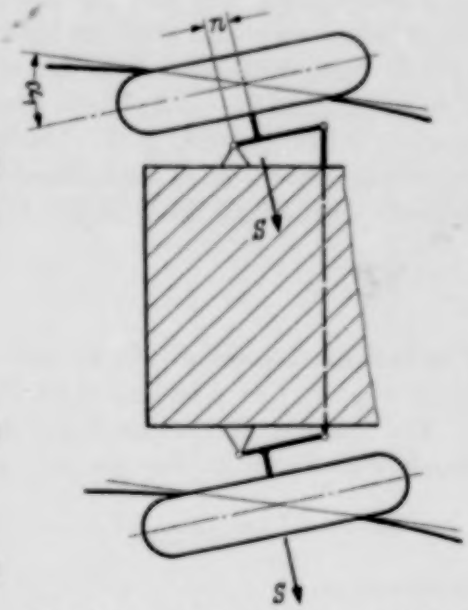


Abb. 6. Schema der Rückstellwirkung des Nachlaufes

Da man (16) durch σ^2 kürzen kann, kommt zunächst wieder die Doppelwurzel $\sigma_{5,6} = 0$, die in der allgemeinen Lösung des Systems (14) auf ein absolutes und ein mit der Zeit linear anwachsendes Glied führt. Das erstere ist uninteressant und das letztere wurde weiter oben als die Folge des exzentrischen Stoßes auf das ganze Fahrzeug gedeutet, die trotz ihrer Kleinheit nur durch den Lenker behoben werden kann. Bei der Beurteilung der Lenkstabilität müssen daher diese beiden Lösungen ausgeschlossen werden.

Auf die durch σ^2 dividierte Gleichung. (16)

$$a_0\,\sigma^4 + a_1\,\sigma^3 + a_2\,\sigma^2 + a_3\,\sigma + a_4 = 0 \tag{18}$$

kann man das Stabilitätskalkül nach *Hurwitz* anwenden, das außer durchweg positivem a_i in diesem Fall verlangt, daß

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

und $\Delta_4 = a_4\,\Delta_3 > 0$ sein müssen, wenn jede Wurzel von (18) einen negativen Realteil haben soll. Dann setzt sich die allgemeine Lösung des Systems (14), die ähnlich wie (7) angesetzt werden kann, aus vier mit der Zeit abklingenden Gliedern zusammen.

Unter der Annahme, daß sich das System an der Stabilitätsgrenze befindet, d. h., daß rein imaginäre Wurzeln auftreten, muß die Summe der Glieder mit den ungeraden Potenzen von σ in (18) für sich verschwinden. Es wird $a_1\,\sigma^3 + a_3\,\sigma = 0$ und daraus mit (17)

$$\sigma_{1,2} = \pm\,i\,\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \pm\,i\,\sqrt{\frac{n\,k}{2\,I_\varphi}}\,. \tag{19}$$

Mit einem dieser Werte für σ muß jetzt auch die Summe der Glieder mit den geraden Potenzen von σ und des absoluten Gliedes verschwinden. Es muß

$$C^2\,l\,\frac{I_\varphi}{n\,k}\left(\frac{n\,k}{2\,I_\varphi}\right)^2 + \left(C^2\,l + \frac{l}{v^2}\cdot\frac{I_\varphi}{n\,k}\right)\left(\frac{-\,n\,k}{2\,I_\varphi}\right) + C = 0$$

sein. Daraus folgt für den Nachlauf

$$n = \frac{4\,I_\varphi}{C^2\,l\,k}\left(C - \frac{l}{2\,v^2}\right), \tag{20}^1$$

eine Bedingung, die mit $\Delta_3 = 0$ identisch ist. Wenn außerdem $\Delta_1 > 0$ und $\Delta_2 > 0$ erfüllt sind, kann man erwarten, daß die beiden restlichen Wurzeln negative Realteile haben, d. h. daß durch (20) die Stabilitätsgrenze in der $n - v$ Ebene festgelegt ist. Die Bedingung $\Delta_1 = a_1 > 0$ führt mit (20) in (17) auf $C - l/2\,v^2 > 0$, der Nachlauf muß also stets positiv sein. Die Bedingung $\Delta_2 = a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0$ führt auf $C > 0$. Da in (17) $a_4 = C$ ist, sind beide Bedingungen schon in der Bedingung durchweg positiver a_i enthalten. Wegen $\sigma_{1,2} = \pm\, i\,\nu$ ergibt sich mit (20) in (19) die ungedämpfte Eigenfrequenz ν an der Stabilitätsgrenze als Funktion der Fahrgeschwindigkeit v zu

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{C\,l} - \frac{1}{C^2\,v^2}}\,. \tag{21}$$

Die Stabilitätsgrenze (20) in der (n, v)-Ebene erreicht bei $v = \sqrt{l/2\,C}$ die Abszissenachse, dort wird auch $\nu = 0$. Für kleinere v ist die Abszissenachse selbst Stabilitätsgrenze.

Die beiden restlichen Wurzeln von (18) ergeben sich, wenn man (20) in (18) einsetzt und durch das Produkt der zu $\sigma_{1,2}$ gehörigen Linearfaktoren

$$(\sigma - \sigma_1)\,(\sigma - \sigma_2) = \sigma^2 + \frac{n\,k}{2\,I_\varphi}$$

dividiert, zu

$$\sigma_{3,4} = -\frac{1}{C\,v} \pm i\sqrt{\frac{2}{C\,l} - \frac{1}{C^2\,v^2}}\,,$$

wie erwartet, mit negativem Realteil.

Aus (20) wird für $v = \infty$

$$n = \frac{4\,I_\varphi}{C\,l\,k}\,. \tag{20a}$$

Mit diesem oder einem größeren Nachlauf ist die Lenkung bei allen Geschwindigkeiten stabil. Für $I_\varphi = 0{,}06$ kg m^2, $C = 1/\mathrm{k_0 g} = 0{,}02$ m^{-1}s^2, $l = 2$ m und $k = 1000$ kp wird $h = 0{,}006$ m $= 6$ mm. Schon der recht kleine Nachlauf von 6 mm (das sind für ein Rad von 600 ∅ etwa $\delta = 1°10'$ nach der üblichen Bezeichnung) verhindert angefachte Schwingungen. Da einerseits der ausgeführte Nachlauf nach *de Lavaud* 2° bis 4° beträgt und andererseits nach *Becker*, *Fromm* und *Maruhn* die Wirkungslinie der Seitenkraft nicht durch den geometrischen Bodenberührungspunkt des Rades, sondern etwas dahinter vorbeigeht[2], ist der mechanisch wirksame Nachlauf der Kraftwagen jedenfalls größer als nach (20a) errechnet wurde.

Die in Abb. 7 als Funktion von n und v eingezeichnete Stabilitätsgrenze trennt das Gebiet der gedämpften von dem der angefachten Schwingungen, ohne etwas über die zugehörigen Amplituden auszusagen. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Größe der ungedämpften Schiebeamplituden mit sinkender Frequenz stark zunimmt, was auch für die gedämpften gelten muß.

Es ist daher nachzuprüfen, ob im stabilen Bereich in Abb. 7 schwach gedämpfte Schwingungen mit niederer Frequenz auftreten, die unmittelbar nach der Störung auf große Amplituden der Seitenschiebung führen. Starke Dämpfung bei der gleichen Frequenz ist nicht so bedenklich, da durch sie der Einschlagwinkel φ der Vorderräder beim Überfahren der Störung verringert wird, dem die Schiebeamplituden proportional sind. Deshalb ist auch ein aperiodisches Zurückgehen des Einschlagwinkels nicht gefährlich, wenn die sich daraus ergebende Kursänderung zusammen mit der durch den exzentrischen Stoß um die Hochachse bewirkten vom Lenker behoben wird. Niederfrequenten Schwingungen des Lenksystems und damit des ganzen Fahrzeugs kann der Lenker jedoch nicht leicht entgegenwirken. Das neben dem Verlangsamen der Fahrt beste Mittel, eine flache Kurve zu fahren, ist meist nicht anwendbar.

11. Die konjugiert komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung. Da nur die periodischen Lösungen von (18) interessieren und diese konjugiert auftreten, entstehen nur zwei Schwingungen mit den Frequenzen $\nu_{1,2}$ und $\nu_{3,4}$, denen die paarweise konjugiert komplexen Lösungen $\sigma_{1,2}$ und $\sigma_{3,4}$ der Gleichung vierten Grades entsprechen. Der Weg, diese Gleichung für beliebig vorgegebene Werte von n und v zu lösen und so ein Bild von der Verteilung der Frequenzen $\nu_{1,2}$ und $\nu_{3,4}$

[1] Für $\mu \neq 1$ ist die rechte Seite von (20) mit dem Faktor $1/\mu$ zu multiplizieren; (19) bleibt unverändert. Die Bedeutung von μ ist aus Fußnote 1 auf Seite 91 zu ersehen.

[2] Der dadurch bewirkte sog. „Reifennachlauf" wächst mit zunehmender Radlast, bzw. mit abnehmendem Innendruck des Luftreifens an und kann bei Niederdruckreifen die Größe von einigen Zentimetern erreichen.

und ihrer Dämpfung im stabilen Bereich zu erhalten, ist jedenfalls sehr langwierig. Es soll daher versucht werden, der Gleichung (18) ähnlich wie beim Aufsuchen der Stabilitätsgrenze eine bestimmte Art von Lösungen vorzuschreiben und als Nebenbedingung dafür einen Zusammenhang zwischen n und v zu erhalten. Dadurch können unter Umständen innerhalb des stabilen Bereichs in Abb. 7 eine oder zwei Linien festgelegt werden. Auf diesen Linien können wieder Punkte zu vorgegebenen Frequenzen aufgesucht und die zur gleichen Frequenz gehörigen Punkte miteinander verbunden werden. Allerdings ist ein solches Verfahren nur bei Gleichungen vierten Grades mit einer gewissen Symmetrie der Koeffizienten anwendbar, wie sie (18) tatsächlich aufweist.

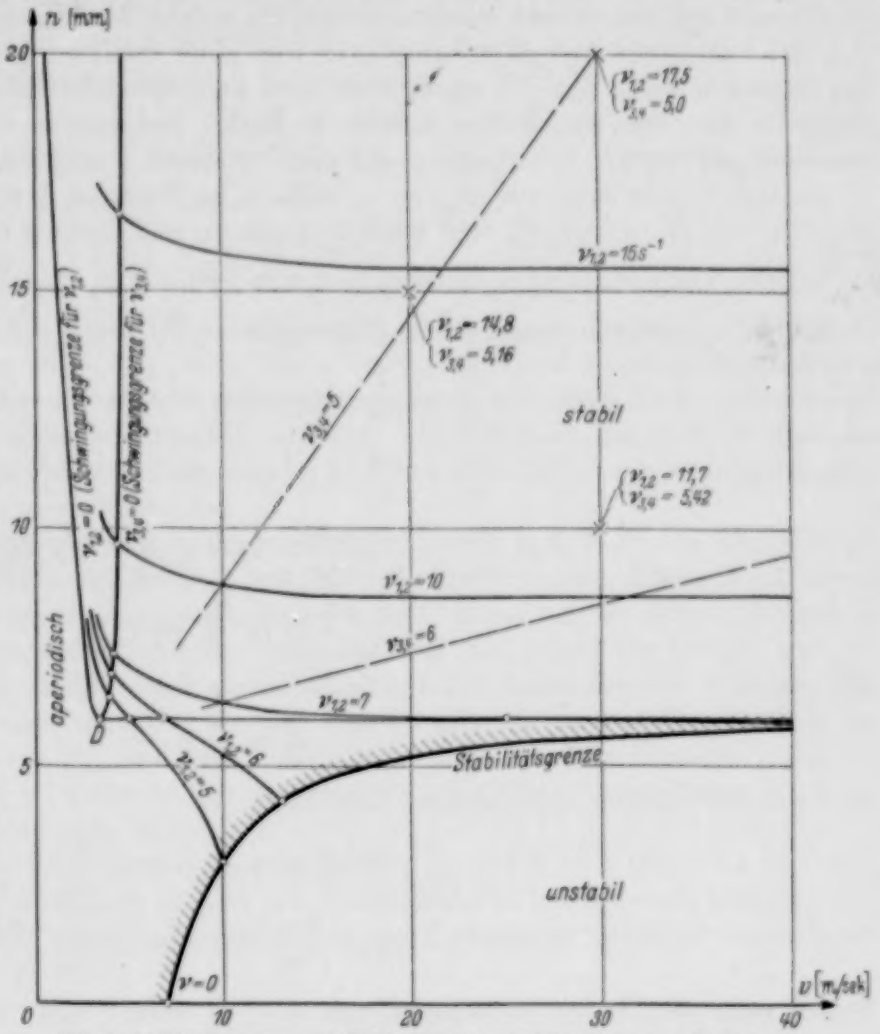


Abb. 7. Stabilitätsgrenze und Linien konstanter Eigenfrequenz abhängig von Fahrgeschwindigkeit und Nachlauf.

Zunächst sollen zwei zweifache, konjugiert komplexe Wurzeln als Lösung vorgeschrieben werden. Dann ist $\sigma_{1,2}=\sigma_{3,4}=x_1 \pm i\nu$. Das Produkt der ersten zwei Linearfaktoren wird $[\sigma-(x_1+i\,\nu)]\,[\sigma-(x_1-i\,\nu)]=\sigma^2-2\,\sigma\,x_1+x_1^2+\nu^2$ und wenn man diesen Ausdruck quadriert und nach Potenzen von σ ordnet, kommt

$$\sigma^4-4\,x_1\,\sigma^3+(6\,x_1^2+2\,\nu^2)\,\sigma^2-4\,(x_1^3+x_1\,\nu^2)\,\sigma+(x_1^2+\nu^2)^2=0\,.$$

Man kann nun durch Koeffizientenvergleich mit der durch a_0 dividierten Gleichung (18) x_1 und ν berechnen. Da aber mehr Gleichungen zu erfüllen als Unbekannte vorhanden sind, erhält man als Nebenbedingung eine Beziehung zwischen den Koeffizienten. d. h. hier zwischen den darin auftretenden Parametern n und v.

Mit (17) wird

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{2}{Cv}=-4\,x_1\,,\qquad x_1=-\frac{1}{2\,Cv}\,,$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\frac{nk}{I_\varphi}+\frac{1}{C^2v^2}=6\,x_1^2+2\,\nu^2=\underbrace{\frac{3}{2}\,\frac{1}{C^2v^2}}_{6\,x_1^2}+\underbrace{\left(\frac{nk}{I_\varphi}-\frac{1}{2\,C^2v^2}\right)}_{2\,\nu^2},$$

$$\frac{a_3}{a_0}=\frac{1}{Cv}\,\frac{nk}{I_\varphi}=-4\,x_1\,(x_1^2+\nu^2)\,,$$

$$\frac{a_4}{a_0}=\frac{1}{Cl}\,\frac{nk}{I_\varphi}=(x_1^2+\nu^2)^2\,.$$

Da

$$x_1^2+\nu^2=\sqrt{\frac{1}{Cl}\,\frac{nk}{I_\varphi}}=\frac{1}{Cv}\,\frac{nk}{I_\varphi}\left(\frac{1}{-4\,x_1}\right)=\frac{1}{Cv}\,\frac{nk}{I_\varphi}\,\frac{Cv}{2}$$

sein muß, so folgt

$$\frac{1}{Cl}\,\frac{nk}{I_\varphi}=\frac{n^2k^2}{4\,I_\varphi^2}\,,\qquad n=\frac{4\,I_\varphi}{Clk}=\text{const.}\tag{20a}$$

Das ist in Abb. 7 eine waagerechte Gerade und Asymptote an die Stabilitätsgrenze (20). Auf ihr hat Gleichung (18) die Wurzeln

$$\sigma_{1,2}=\sigma_{3,4}=-\frac{1}{2\,Cv}\pm i\sqrt{\frac{nk}{2\,I_\varphi}-\frac{1}{4\,C^2v^2}}=-\frac{1}{2\,Cv}\pm i\sqrt{\frac{2}{Cl}-\frac{1}{4\,C^2v^2}}\,.\tag{21a}$$

Die Kreisfrequenz ν wird Null für $v = \sqrt{l/8\,C}$, für kleinere v existieren solche speziellen Lösungen nicht.

Danach soll untersucht werden, ob und für welche Werte von n und v Lösungen von (18) existieren, die aus zwei konjugiert komplexen und einer reellen Doppelwurzel bestehen. Das Auftreten der letzteren zeigt den Übergang von zwei konjugiert komplexen zu zwei verschiedenen reellen Wurzeln an. Die zugehörige Kurve in Bild 7 bedeutet mechanisch die „Schwingungsgrenze" zwischen gedämpfter Schwingung und aperiodischem Übergang.

Es soll $\sigma_{1,2} = x_1 \pm i\,\nu$, $\sigma_{3,4} = x_2$ sein. Das Produkt der Linearfaktoren ist $[\sigma - (x_1 + i\,\nu)]\,[\sigma - (x_1 - i\,\nu)]\,(\sigma - x_2)^2$, und nach Entwickeln und Ordnen nach Potenzen von σ wird

$$\sigma^4 - 2\,(x_1 + x_2)\,\sigma^3 + (x_1^2 + \nu^2 + x_2^2 + 4\,x_1\,x_2)\,\sigma^2 - [2\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_2\,(x_1^2 + \nu^2)]\,\sigma + (x_1^2 + \nu^2)\,x_2^2 = 0$$

Der Koeffizientenvergleich mit (18) ergibt

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2}{C\,v} = -\,2\,(x_1 + x_2)\,,$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{n\,k}{I_\varphi} + \frac{1}{C^2\,v^2} = x_1^2 + \nu^2 + x_2^2 + 4\,x_1\,x_2\,,$$

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{1}{C\,v}\,\frac{n\,k}{I_\varphi} = -\,2\,x_1\,x_2^2 - 2\,x_2\,(x_1^2 + \nu^2)\,,$$

$$\frac{a_4}{a_0} = \frac{1}{C\,l}\,\frac{n\,k}{I_\varphi} = (x_1^2 + \nu^2)\,x_2^2\,.$$

Mit

$$x_1 = -\frac{1}{C\,v} - x_2$$

wird aus der zweiten, bzw. dritten Gleichung

$$\frac{1}{C^2\,v^2} - \frac{2\,x_2}{C\,v} - 2\,x_2^2 + \nu^2 = \frac{n\,k}{I_\varphi} + \frac{1}{C^2\,v^2}\,,$$

$$-\frac{2}{C\,v}\,x_2^2 - \frac{2\,x_2}{C^2\,v^2} - 2\,x_2\,\nu^2 = \frac{1}{C\,v}\,\frac{n\,k}{I_\varphi}\,.$$

Wenn man die letzte Gleichung mit $C\,v$ erweitert und von der vorletzten abzieht, folgt $\nu^2 + 2\,x_2\,\nu^2\,C\,v = 0$, $x_2 = -\,1/2\,C\,v$ und nach Einsetzen dieses Wertes für x_2 in die vorletzte Gleichung

$$\nu = \sqrt{\frac{n\,k}{I_\varphi} - \frac{1}{2\,C^2\,v^2}}$$

sowie endlich

$$x_1 = -\frac{1}{2\,C\,v}\,.$$

Die Werte für x_1, ν und x_2 in die vierte Gleichung eingesetzt ergeben als Nebenbedingung eine Beziehung zwischen den Parametern n und v

$$n = \frac{I_\varphi}{k}\,\frac{C\,l}{4\,C^2\,v^2\,(C\,l - 4\,C^2\,v^2)}\,. \tag{20b}$$

Das ist die Gleichung der „Schwingungsgrenze" in Abb. 7. Auf dieser Kurve hat (18) die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1,2} = x_1 \pm i\,\nu &= -\frac{1}{2\,C\,v} \pm i\sqrt{\frac{8\,C^2\,v^2 - C\,l}{4\,C^2\,v^2\,(C\,l - 4\,C^2\,v^2)}}\,, \\ \sigma_{3,4} = x_2 &= -\frac{1}{2\,C\,v}\,. \end{aligned}\right\} \tag{21b}$$

Das Minimum dieser Kurve liegt bei $v = \sqrt{l/8\,C}$, wo sie von der Geraden nach (20a) berührt wird. In diesem Punkt (D in Abb. 7) hat die Gleichung (18) eine vierfache negativ reelle Wurzel. Die Realteile der Lösungen sind auf der Kurve und Gerade von vornherein gleich und in Punkt D verschwinden wegen $\nu = 0$ die Imaginärteile, die in Anzahl und Größe auf beiden Linien verschieden sind. Auf dem rechten Ast der Kurve ist ν reell, dort gibt es außer der negativ reellen Doppelwurzel zwei konjugiert komplexe Wurzeln, d. h. dieser Ast ist die Schwingungsgrenze für eine der beiden Eigenfrequenzen und zwar für $\nu_{3,4}$, während $\nu_{1,2}$ dort noch auftritt. Auf dem linken Ast wird ν imaginär, und die zwei konjugiert komplexen Wurzeln verwandeln sich in zwei negativ reelle. Dieser Ast ist die Schwingungsgrenze für $\nu_{1,2}$.

Zu einer bestimmten Eigenfrequenz ν findet man den auf der Stabilitätsgrenze (20) liegenden Punkt mit

$$v^2 = \frac{l}{C(2 - \nu^2 C l)}, \tag{22}$$

den auf der Geraden (20a) liegenden Punkt mit

$$v^2 = \frac{l}{4C(2 - \nu^2 C l)} \tag{22a}$$

und den auf der Schwingungsgrenze liegenden Punkt mit

$$v^2 = \frac{-2 + C l \nu^2 \pm \sqrt{4 + C^2 l^2 \nu^4}}{8 C^2 \nu^2}. \tag{22b}$$

Auf den beiden ersten Linien sind die beiden Eigenfrequenzen gleich $\nu = \nu_{1,2} = \nu_{3,4}$, auf dem rechten Ast der Schwingungsgrenze ist $\nu = \nu_{1,2}$, $\nu_{3,4} = 0$. Zwischen Punkt D und dem Schnittpunkt von Stabilitätsgrenze und Abszissenachse konnte die Schwingungsgrenze mit dem oben geschilderten Verfahren nicht als Funktion von n und v dargestellt werden. Sie fällt dort für beide Frequenzen $\nu_{1,2}$ und $\nu_{3,4}$ zusammen, so daß durch den Koeffizientenvergleich nur zwei Unbekannte zu bestimmen, dafür aber zwei Nebenbedingungen zu erfüllen sind.

In Abb. 7 wurden die Linien gleicher Eigenkreisfrequenz für $\nu_{1,2} = 0, 5, 6, 7, 10$ und $15\ s^{-1}$ eingezeichnet, nachdem zur Kontrolle für einige beliebig gewählte Punkte in der n–v Ebene die Wurzeln der Gleichung (18) mit einem von *A. Leonhard*[1] angegebenen Näherungsverfahren berechnet wurden. Die Linien $\nu_{1,2} = \text{const}$ verlaufen bei höherer Geschwindigkeit praktisch parallel zur Abszissenachse. Die Linien $\nu_{3,4} = \text{const}$ breiten sich strahlenförmig im stabilen Bereich zwischen Stabilitätsgrenze und Schwingungsgrenze aus. Für ein gegebenes v nimmt im stabilen Bereich mit wachsenden n die eine Eigenfrequenz $\nu_{1,2}$ und ihre Dämpfung zu, die andere Eigenfrequenz $\nu_{1,2}$ nimmt dagegen ab. Für ein gegebenes n nimmt mit wachsenden v die Dämpfung allgemein ab und beide Eigenfrequenzen nehmen geringfügig zu.

Daraus folgt, daß der Nachlauf der Vorderräder etwas größer als der Wert nach (20a) $n = 4 J_\varphi / C l k$ ausgeführt werden soll. Bei kleinerem n geht die Lenkstabilität bei höheren Geschwindigkeiten verloren, während sie durch erhebliche Vergrößerung von n zumindest nicht wesentlich verbessert werden kann.

Nach (21) ist

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{C l} - \frac{1}{C^2 v^2}},$$

d. h. ein großer Radstand ist ungünstig, da er die Eigenfrequenzen des Fahrzeugs herabgesetzt und die Amplituden des Schiebens und Gierens erhöht, wie man erkennt, wenn man mit ν aus (21) in (11) bzw. (10) eingeht.

Mit (20a) und $C = 1/k_0 g$, $k = k_0 G/4$ kann als Richtwert für den Nachlauf zunächst

$$n = \frac{16 I_\varphi}{m l} \tag{20c}$$

angegeben werden. In diesem Ergebnis ist jedoch der Luftwiderstand noch nicht berücksichtigt, was bei hohen Geschwindigkeiten unerläßlich ist.

12. Der Einfluß der Luftkräfte. Es wurde vorausgesetzt, daß die resultierende Luftkraft bei Windstille der Schwerpunktsgeschwindigkeit des Fahrzeugs entgegengerichtet und deren Quadrat proportional sei von der Form $W_L = k_L v^2$. Um zu einem mittleren Wert für k_L zu kommen, wurde angenommen, daß bei $v \approx 50$ km/h der Luftwiderstand die Größe des Rollwiderstands erreiche. Damit wird $W_L = k_L v^2 = G f_R$ und mit $G = 800$ kp, $f_R = 0{,}02$ wird $k_L = 0{,}08$, was eher etwas zu hoch gegriffen ist.

Mit dem Schwimmwinkel β zwischen Schwerpunktgeschwindigkeit und Fahrzeuglängsachse bzw. genauer mit der Summe des Schwimmwinkels β und des Gierwinkels ψ multipliziert, hat der Luftwiderstand eine Komponente quer zur Fahrtrichtung. Da in der Einleitung die Schräglaufwinkel und damit auch β und ψ klein vorausgesetzt wurden, bleibt die Komponente von W_L sehr klein gegenüber den Seitenkräften der Räder. Dasselbe gilt für den Kraftarm eines etwa auftretenden Moments des Luftwiderstandes um die Hochachse des Fahrzeugs. Bei Windstille können diese Einflüsse kaum zur Anfachung kleiner Schwingungen beitragen, was jedoch nicht gegen die große Gefährlichkeit von seitlichen Windstößen oder des Luftwiderstandes auf ein bereits aus der Bahn geratenes Fahrzeug mit großem Schwimmwinkel spricht.

[1] *A. Leonhard*, Die selbsttätige Regelung, Berlin 1957.

Der Luftwiderstand hat aber noch eine ganz andere Wirkung, die überhaupt nicht von den Amplituden bereits vorhandener Schwingungen abhängt. Da seine Wirkungslinie jedenfalls in einem erheblichen Abstand über die Fahrbahn verläuft, entlastet er die Vorderräder und belastet die Hinterräder in ähnlicher Weise wie die Trägheit beim Beschleunigen des Fahrzeugs. Dadurch setzt er die Lenkstabilität wesentlich herab, wie der Grenzfall der vollkommen entlasteten Vorderräder zeigt, die keine Seitenkräfte mehr aufnehmen können.

Die bezogene Änderung des Raddrucks eines Vorderrades durch den Luftwiderstand ist

$$\frac{N-\Delta N}{N}=\frac{0{,}25\,G-0{,}5\,k_L\,v^2\,h_L/l}{0{,}25\,G}=1-\frac{2\,h_L}{G\,l}\,k_L\,v^2=1-\zeta\,, \tag{23}$$

worin mit dem Abstand des Luftwiderstandes von der Fahrbahn $h_L = 0{,}75$ m und den schon früher verwendeten Werten $\zeta = 0{,}75\cdot 10^{-4}\,v^2$ wird. Damit lauten die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugs unter Berücksichtigung von (2) und (2a) und wegen $k = k_0\,N$

$$\left.\begin{aligned} -m\,\ddot{y} &= 2\,k\,[(1-\zeta)\,\alpha_1+(1+\zeta)\,\alpha_2]=2\,k\left(\frac{2}{v}\,\dot{y}-2\,\psi+\varphi-\zeta\,\frac{l}{v}\,\dot{\psi}-\zeta\,\varphi\right),\\ -I_z\,\ddot{\psi} &= 2\,k\,\frac{l}{2}\,[(1-\zeta)\,\alpha_1-(1+\zeta)\,\alpha_2]=k\,l\left(\frac{l}{v}\,\dot{\psi}+\varphi-2\,\zeta\,\frac{1}{v}\,\dot{y}+2\,\zeta\,\psi-\zeta\,\varphi\right).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und mit $C = m/4\,k = I_Z/l^2\,k$ kommt nach Ergänzung durch die Bewegungsgleichung der Lenkung das System

$$\left.\begin{aligned} C\,\ddot{y}+\frac{1}{v}\,\dot{y}-\psi-\frac{\zeta}{2}\,\frac{l}{v}\,\dot{\psi}+\frac{\varphi}{2}\,(1-\zeta)&=0\,,\\ C\,l\,\ddot{\psi}+\frac{l}{v}\,\dot{\psi}+2\,\zeta\,\psi-2\,\zeta\,\frac{1}{v}\,\dot{y}+\varphi\,(1-\zeta)&=0\,,\\ \frac{I_\varphi}{n\,k\,(1-\zeta)}\,\ddot{\varphi}+\varphi+\frac{1}{v}\,\dot{y}+\frac{l}{2\,v}\,\dot{\psi}-\psi&=0\,,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

dessen Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \left[C\,\sigma^2+\frac{1}{v}\,\sigma\right] & \left[-\zeta\,\frac{l}{2\,v}\,\sigma-1\right] & \frac{1}{2}\,(1-\zeta)\\ -2\,\zeta\,\frac{1}{v}\,\sigma & \left[C\,l\,\sigma^2+\frac{l}{v}\,\sigma+2\,\zeta\right] & (1-\zeta)\\ \frac{1}{v}\,\sigma & \left[\frac{l}{2\,v}\,\sigma-1\right] & \left[\frac{I_\varphi}{n\,k\,(1-\zeta)}\,\sigma^2+1\right]\end{vmatrix}=0 \tag{26}$$

sein soll. Die daraus folgende charakteristische Gleichung (16) vom sechsten Grade in σ hat die Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} a_0&=C^2\,l\,\frac{I_\varphi}{n\,k\,(1-\zeta)}\,,\qquad a_1=\frac{2\,C\,l}{v}\,\frac{I_\varphi}{n\,k\,(1-\zeta)}\,,\\ a_2&=C^2\,l+\frac{I_\varphi}{n\,k\,(1-\zeta)}\left(\frac{l}{v^2}+2\,\zeta\,C-\zeta^2\,\frac{l}{v^2}\right),\qquad a_3=\frac{C\,l}{v}\,(1+\zeta)\,,\\ a_4&=C\,(1+\zeta)\,,\qquad a_5=a_6=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Man kann die Gleichung daher wieder durch σ^2 kürzen, wobei die Bedeutung der Doppelwurzel $\sigma_{5,6}=0$ schon bei der Besprechung der Gleichung (5) bis (7) erwähnt wurde.

Übrig bleibt die Gleichung vierten Grades (18) mit den Koeffizienten a_0 bis a_4 in (27), die wieder die Stabilitätsbedingungen [alle a_i positiv, sowie $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$ und $\Delta_4>0$, siehe Gleichungen (18) ff] erfüllen müssen, wenn (18) nur Wurzeln mit negativen Realteil haben soll. An der Stabilitätsgrenze sind auch rein imaginäre Wurzeln zugelassen und dort muß wieder gelten:

$$a_1\,\sigma^3+a_3\,\sigma=0,\qquad \sigma_{1,2}=\pm\,i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}=\pm\,i\sqrt{\frac{n\,k\,(1-\zeta^2)}{2\,I_\varphi}}\,. \tag{28}$$

Mit der einen wie mit der anderen dieser Wurzeln muß dann auch der Rest der Gleichung (18) verschwinden, z. B. $a_0\,\sigma_1^4+a_2\,\sigma_1^2+a_4=0$, worin a_0, a_2 und a_4 aus (27) zu entnehmen sind. Daraus ergibt sich nach einigem Umformen die Stabilitätsgrenze als Beziehung zwischen den Parametern n, v und $\zeta(v)$:

$$n=\frac{4\,I_\varphi}{C^2\,l\,k\,(1-\zeta)}\left[C-\frac{l}{2\,v^2}\,(1+\zeta)\right]. \tag{29}^1$$

[1] Auch für (29) gilt sinngemäß Fußnote 1 auf Seite 96; (28) bleibt unverändert.

Durch Einführen des Nachlaufs n nach (29) in die Ausdrücke für die Koeffizienten (27) prüft man, ob die anderen Stabilitätsbedingungen erfüllt sind. $\Delta_1 = a_1 > 0$ führt auf

$$C - \frac{l}{2v^2}(1+\zeta) > 0\,,$$

d. h., daß nur der positive Ast der Kurve (29) Stabilitätsgrenze ist. Die Bedingung $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ führt auf $C > 0$. Die Gleichung der Stabilitätsgrenze (29) ist identisch mit $\Delta_3 = 0$, weshalb auch $\Delta_4 = a_4 \Delta_3 = 0$ wird.

Mit (29) in (28) erhält man den Zusammenhang zwischen der Frequenz der ungedämpften Schwingung und der Fahrgeschwindigkeit an der Stabilitätsgrenze:

$$v = \sqrt{\frac{2}{C^2 l}(1+\zeta)\left[C - \frac{l}{2v^2}(1+\zeta)\right]}\,. \tag{30}$$

Durch Umformen dieses Ausdrucks erhält man für ein vorgegebenes v eine biquadratische Gleichung für das zugehörige v an der Stabilitätsgrenze, da man $\zeta = \zeta(v)$ beachten muß.

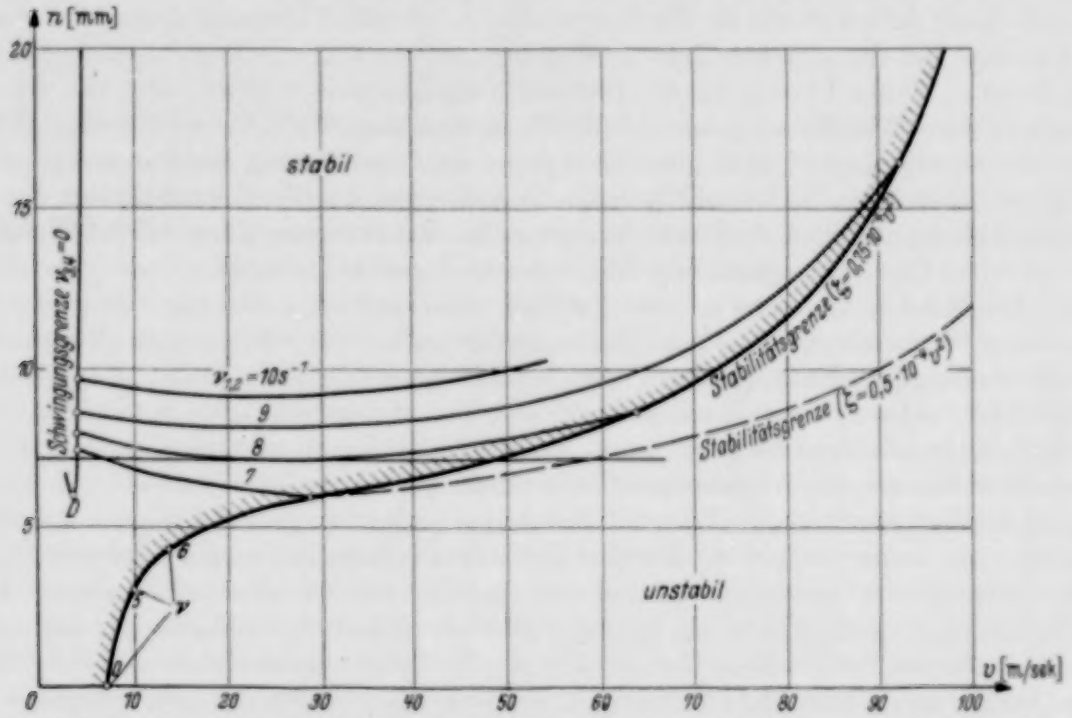


Abb. 8. Stabilitätsgrenze und Linien konstanter Eigenfrequenz bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

In Abb. 8 sind die Stabilitätsgrenze bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes nach Gleichung (29) und einige Linien konstanter Frequenz $\nu_{1,2}$ über der Fahrgeschwindigkeit aufgetragen. Allerdings wurden von den Frequenzlinien nur die Punkte auf der Stabilitätsgrenze (29) und auf dem rechten Ast der Schwingungsgrenze (20b) berechnet. Letzteres ist zulässig, da an der Schwingungsgrenze die Geschwindigkeiten so niedrig sind, daß dort der Luftwiderstand keine Rolle spielt. Deswegen konnten auch die $\nu_{1,2} =$ konst. Linien ohne Berechnung von weiteren Zwischenpunkten, die jeweils die Lösung einer Gleichung vierten Grades verlangt hatte, mit guter Näherung eingezeichnet werden.

Bei hohen Geschwindigkeiten wird der stabile Bereich infolge der Entlastung der Vorderräder durch den Luftwiderstand stark eingeschränkt, wobei die Windschlüpfigkeit des Fahrzeugs und das Verhältnis der Höhe des Angriffspunktes der Luftkräfte zum Radstand das Ergebnis wesentlich beeinflussen. Außer für die bezogene Radlaständerung $\zeta = 0{,}75 \cdot 10^{-4} v^2$ ist die Stabilitätsgrenze (29) auch noch für $\zeta = 0{,}5 \cdot 10^{-4} v^2$ eingezeichnet, wobei die letztere Kurve einem geringeren Luftwiderstandsbeiwert bzw. einer tieferliegenden Wirkungslinie des Luftwiderstandes entspricht. Für $v = 50$ m/s, d. h. für eine Fahrgeschwindigkeit von 180 km/h, ergibt sich der Nachlauf an der Stabilitätsgrenze aus (29) mit $\zeta = 0{,}75 \cdot 10^{-4} v^2$ und den vorher benutzten Werten zu $n = 7{,}2$ mm; das entspricht für ein Rad von 600 ∅ nicht ganz 1,5 Grad Rückwärtsneigung des Lenkzapfens.

13. Die obere Grenze des Nachlaufs. Bei der technischen Ausführung des Nachlaufs durch Neigung der Lenkzapfen der Vorderräder (Abb. 1) kann schon aus kinematischen Gründen n nicht sehr groß werden. Andernfalls würde beim Einschlagen der Vorderräder der Schwerpunkt des Fahrzeugs gesenkt und bei Geradeaus-Stellung der Lenkung wäre zumindest das stehende Fahr-

zeug in einer labilen Gleichgewichtslage. Das könnte allerdings bei einer Ausführung nach Abb 6 mit in der Fahrtrichtung nicht geneigten Lenkzapfen vermiedern werden. Es gibt aber noch einen zweiten wichtigen Grund, den Nachlauf nicht über das notwendige Maß hinaus zu vergrößern.

Bisher wurde stets von einer Störung durch eine Unebenheit der Fahrbahn ausgegangen, die zunächst die Vorderräder auslenkt und damit indirekt die Bewegung des Fahrzeugs beeinflußt. Ein seitlicher Windstoß wirkt dagegen zunächst auf den Aufbau des Fahrzeugs und wird zum Teil über die Lenkzapfen auf die Vorderräder übertragen. Daher entsteht infolge des Nachlaufs ein Moment, das die Vorderräder nach der falschen, dem Wind abgewandten Seite einzuschlagen sucht, während ein Einschlagen gegen die Windrichtung zur Erzielung der ausgleichenden Seitenkraft erforderlich wäre. Je größer der Nachlauf, desto empfindlicher reagiert das Fahrzeug auf seitliche Windstöße. Nach Meinung des Verfassers läßt sich dadurch die bekannte Empfindlichkeit gegen Seitenwind gerade vieler schneller, windschnittiger Fahrzeuge zumindest teilweise erklären.

14. Der Auftrieb. Im allgemeinen wirkt die resultierende Luftkraft auf einen Kraftwagen nicht genau parallel zur Fahrbahn, so daß zum Luftwiderstand noch ein kleinerer Auftrieb hinzukommt. Dieser sei als Kraft definiert, die die Radlasten aller Räder des Fahrzeugs gegenüber der statischen Radlastverteilung um den gleichen Betrag verändert, während der Luftwiderstand eine Belastungsänderung bewirkt, deren Betrag für ein Radpaar entgegengesetzt gleich dem für das andere ist. Damit kann jede im Windkanal gemessene Radlastverteilung in die Rechnung eingeführt werden. Vorausgesetzt ist allerdings, daß sich der Charakter der Umströmung des Fahrzeugs nicht mit der Fahrgeschwindigkeit ändert. Es muß nun ähnlich wie bei der Berücksichtigung des Luftwiderstandes die durch den Auftrieb bewirkte bezogene Radlaständerung $\xi^*(v)$ in die Gleichungen (24) und die zugehörige Bewegungsgleichung der Lenkung eingeführt werden.

Um den Einfluß des Auftriebs auf die Stabilität ohne weitere Rechnung zu zeigen, soll hier der Luftwiderstand vernachlässigt werden. Dann genügt es, in den Gleichungen (1a) und in der zugehörigen Bewegungsgleichung der Lenkung (13) die ganzen rechten Seiten, die von den Seitenkräften der Räder stammen, mit dem Faktor $1 - \xi^*(v) < 1$ zu multiplizieren. Statt dessen kann man sich auch die Masse, bzw. die Drehmassen auf den linken Seiten entsprechend vergrößert denken. In (20) wachsen damit der „Trägheitswert" C und die Drehmasse des Vorderrades um den Lenkzapfen I_φ im selben Verhältnis, doch wird dadurch der Verlauf der Stabilitätsgrenze auch bei hohen Geschwindigkeiten kaum verändert. Da der Auftrieb die Bodenhaftung und damit die Stabilität des Kraftwagens offenbar verringert, scheint das zunächst ein zweifelhaftes Ergebnis. Es muß hier jedoch daran erinnert werden, daß die Lenkstabilität des Kraftwagens nicht nur von der Lage des betreffenden Zustands im stabililen Bereich der $n - v$ Ebene sondern auch von der Kleinheit der durch die Störung ausgelösten Schiebe- und Gierschwingungen abhängt. In (21) bewirkt die scheinbare Vergrößerung der „horizontalen" Massen bzw. Drehmassen durch den Auftrieb eine Verminderung der Eigenfrequenz ν an der Stabilitätsgrenze mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit v; wenn der Auftrieb den Wert des Gewichts erreicht, wird $\nu = 0$; nach (10) und (11) wachsen dann Gier- und Schiebeamplituden ins unendliche.

Bei einem Kraftwagen kann dieser Zustand nicht erreicht werden, da beim Abheben aller Räder keine Schubkraft zur Überwindung des Luftwiderstandes verfügbar wäre. Außerdem geht die Stabilität infolge Entlastung der Vorderräder durch den Luftwiderstand schon bei viel niedrigerer Geschwindigkeit verloren. Aus dem obigen geht neuerlich hervor, daß nur der Teil der Stabilitätsgrenze praktische Bedeutung hat, auf dem die Eigenfrequenz nicht unter einen bestimmten Wert sinkt. Der andere Teil stellt zwar ebenfalls eine Folge von Zuständen ungedämpfter Schwingungen dar, doch nehmen dabei Schiebe- und Gieramplituden erhebliche Werte an. Da gewöhnlich eine ziemlich schmale Fahrbahn eingehalten werden muß, kann dieser Teil nicht die Grenze eines praktisch stabilen Bereiches bilden. Dazu kommt, daß für große Gier-, Schwimm- und Schräglaufwinkel die getroffenen Voraussetzungen — Seitenkraft proportional Schräglaufwinkel, seitliche Komponente des Luftwiderstandes vernachlässigbar klein — nicht mehr gelten. In Abb. 7 und 8 kommt ein solcher „ungiltiger" Teil der Stabilitätsgrenze nur bei sehr niedriger Fahrgeschwindigkeit vor und ist dort praktisch uninteressant. Nur bei einem Flugzeug, dessen Auftrieb groß gegenüber dem Luftwiderstand ist, wird er bei hohen Geschwindigkeiten auftreten. Bei diesem übernehmen schon lange vor dem Abheben vom Boden Heckflosse und Seitenruder die Stabilisierung.

Schließlich soll nochmals auf die Reihenfolge der Wirkungen der Luftkräfte bei Windstille hingewiesen werden. Bereits vor Eintritt einer Störung vermindern sie die Radlasten zumindest eines Radpaares und machen damit das Fahrzeug für die Störung anfällig. Schon eine kleine Störung kann dann infolge der verminderten Seitenkräfte der Räder zu niederfrequenten Schiebe- und Gier-

schwingungen mit größeren Amplituden führen. Nur in diesem — recht gefährlichen — Fall wird die Anfachung durch die seitliche Komponente des Luftwiderstandes, bzw. durch sein Moment um die Hochachse des Fahrzeugs, wirksam.

15. Zusammenfassung. Bei der Definition der Lenkstabilität und der Berechnung der stationären Amplituden wurde gezeigt, daß nicht so sehr die Dämpfung der Lenk-, Schiebe- und Gierschwingungen eines Fahrzeugs wie genügend hohe Eigenfrequenz des zugehörigen Systems für ein stabiles Verhalten absolut notwendig sind. Es wurde daher nicht nur die Stabilitätsgrenze errechnet, sondern auch die Verteilung der Eigenfrequenzen im stabilen Bereich untersucht und zwar zunächst ohne und dann mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Abb. 7 und 8 zeigen die Ergebnisse in der (n, v)-Ebene. Dort hat die Stabilitätsgrenze die Gleichung (20) bzw. (29). In (29) kann für höhere Geschwindigkeiten das zweite Glied in der eckigen Klammer gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, es kommt dann mit $C = 1/k_0 g$, $k = k_0 G/4$

$$n = \frac{16\, I_\varphi}{m\, l\, (1 - \zeta)}, \tag{29a}$$

worin

$$\zeta = \frac{2\, h_L}{G\, l}\, k_L\, v^2$$

mit v als größter erreichbarer Geschwindigkeit ist. Obwohl n hier der Nachlauf an der Stabilitätsgrenze ist, dürfte es genügen, diesen Wert durch entsprechende Rückwärtsneigung der Lenkzapfen auszuführen. Der wirksame Nachlauf ist größer, da nach *H. Fromm* die Seitenkraft in der Draufsicht eteas hinter der Radachse angreift. Die oben angeführten Gründe sprechen gegen eine erhebliche Vergrößerung des Nachlaufs über den Wert nach (29a) hinaus.

Der Beiwert k_0, d. i. die Seitensteifigkeit der Reifen kommt zwar in (29a) nicht vor, wohl aber in der Gleichung (30) der ungedämpften Eigenfrequenz an der Stabilitätsgrenze. Wegen $C = 1/k_0 g$ sieht man, daß große Seitensteifigkeit der Reifen diese Eigenfrequenz erhöht und damit für die Lenkstabilität günstig ist. Schwieriger ist es, den Einfluß des Radstandes l zu beurteilen. Ein großer Radstand vergrößert zwar den stabilen Bereich in der (n, v)-Ebene und verringert die schädliche Änderung der Radlastverteilung infolge des Luftwiderstandes. Andererseits vermindert er die Eigenfrequenz an der Stabilitätsgrenze und begünstigt so das Entstehen von gefährlichen niederfrequenten Schiebe- und Gierschwingungen mit großen Amplituden.

Bei Steigerung der Fahrgeschwindigkeit mit einem gegebenen Fahrzeug (n = konst.) kommt man zunächst noch im stabilen Bereich in Zustände immer geringerer Dämpfung, während die Eigenfrequenzen des Fahrzeugs sich kaum ändern. Beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze ist, wie vorher die Dämpfung, danach die Anfachung nur sehr gering, und es wachsen deswegen die Amplituden einer durch eine kleine Störung verursachten Schiebe- und Gierschwingung nur langsam an. Die Stabilitätsgrenze in Abb. 8 wird von der waagrechten Geraden n = konst. in einem spitzen Winkel geschnitten, so daß mit wachsendem v ein allmählicher Übergang aus dem stabilen in den unstabilen Bereich stattfindet. Ein aufmerksamer Lenker sollte die Gefahr rechtzeitig erkennen, bevor er einer größeren Störung begegnet, wenn z. B. das Fahrzeug von einem seitlichen Windstoß getroffen wird.

Das gewählte Ersatzsystem für das Fahrzeug berücksichtigt zwar den Einfluß des Schräglaufes der Luftreifen bei seitlicher Belastung und die Lenkbarkeit des Fahrzeugs, aber nicht den Einfluß der Federung. Eine folgende Arbeit soll diese Lücke ausfüllen.

(Eingegangen am 16. Mai 1958.)

Der durchlaufende Balken auf äquidistanten elastischen Stützen*

Von V. Bogunović

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit wird das Biegungsproblem eines durchlaufenden Balkens auf elastisch senkbaren Stützen untersucht. Dabei wird angenommen, daß die beiden Endstützen starr und sämtliche Zwischenstützen elastisch, gleich steif und in gleichen Abständen angeordnet sind. Der Durchlaufbalken wird entweder durch Einzellasten, die über elastische Stützen wirken, oder durch verteilte Last beansprucht. Die Lösung dieses Problems, d. h. die Ermittlung der Stützkräfte und Stützmomente, wird in Form eines trigonometrischen Polynoms angegeben, dessen Gliederzahl mit der Anzahl der elastischen Zwischenstützen übereinstimmt.

2. Elastisch gestützter Durchlaufträger durch Einzelkräfte belastet (Abb. 2).

a) Durchbiegungen und Biegemomente an den äquidistanten Stellen eines frei aufliegenden Balkens. Wir betrachten einen frei gelagerten Balken von der Stützweite l, der durch $m-1$ äquidistante irgendwelche Einzellasten beansprucht wird (Abb. 1). Bezeichnen P_i, u_i und M_i die Einzellast, die Durchbiegung und das Biegemoment an einer Trägerstelle i im Abstand $i\,l/m$ von der linken Stütze, so lassen sich[1] mit der Abkürzung

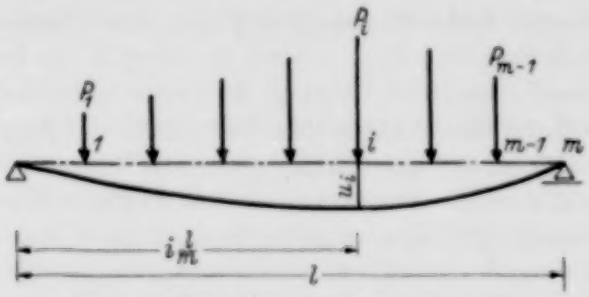


Abb. 1. Balken auf zwei Stützen mit Einzellasten.

$$f_B = \frac{l^3}{48\,E\,I}$$

die Differenzengleichungen für die Durchbiegungen u_i und Biegemomente M_i

$$\delta^2 u_i = -\frac{8}{m^2}\frac{f_B}{l}(M_{i+1} + 4\,M_i + M_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{1}$$

$$\delta^2 M_i = -\frac{l}{m}\,P_i, \tag{2}$$

mit den entsprechenden Randbedingungen

$$u_0 = u_m = 0, \qquad M_0 = M_m = 0,$$

anschreiben, wobei I das unveränderlich vorausgesetzte Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts und E den Elastizitätsmodul des Materials bedeuten.

Dabei bezeichnet der Differenzenoperator δ üblicherweise die zentrale Differenz

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}},$$

und entsprechende höhere Differenzen

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2\,f_i + f_{i-1},$$
$$\delta^4 f_i = \delta^2(\delta^2 f_i),$$

wo f_i den Funktionswert $f_i = f(x_i)$ einer Funktion $f(x)$ an äquidistanten Stellen $x_i = i\,l/m$ bedeutet.

Aus (1) und (2) läßt sich leicht die Differenzengleichung vierter Ordnung

$$\delta^4 u_i = \frac{8}{m^3} f_B\,(P_{i+1} + 4\,P_i + P_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{3}$$

ableiten.

Die Werte von äquidistanten Einzellasten P_i können, wie bekannt[2], in Form eines trigonometrischen Polynoms

$$P_i = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sin i\,k\,\lambda \qquad (\lambda = \pi/m) \tag{4}$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten durch die Summe

$$c_k = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m-1} P_i \sin i\,k\,\lambda \tag{5}$$

gegeben sind.

* Herrn Prof. *J. M. Klitchieff* in Beograd zum 70. Geburtstag gewidmet.

[1] *F. Stüssi*, Vorlesungen über Baustatik, Bd. I, S. 55 u. 238. Basel 1946.

[2] *R. Courant*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, S. 360. Berlin 1930.

Auf ähnliche Weise können auch die Werte M_i der Biegemomente an den äquidistanten Trägerstellen durch das trigonometrische Polynom

$$M_i = \sum_{k=1}^{m-1} b_k \sin i\,k\,\lambda\,, \tag{6}$$

dargestellt werden, wo die Koeffizienten b_k vorläufig noch unbekannt sind.

Wenn wir die Ausdrücke (6) und (4) in die Differenzengleichung (2) einsetzen und beachten, daß

$$\delta^2 f_i = -2\,(1-\cos k\,\lambda)\sin i\,k\,\lambda \tag{7}$$

ist, wobei wir die Bezeichnung

$$f_i = \sin i\,k\,\lambda$$

einführen, so erhalten wir ein System von $m-1$ linearen Gleichungen für die $m-1$ Unbekannten $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$:

$$2\sum_{k=1}^{m-1} b_k\,(1-\cos k\,\lambda)\sin i\,k\,\lambda = \frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1} c_k \sin i\,k\,\lambda \qquad (i=1,2,\ldots,m-1)\,. \tag{8}$$

Dieses Gleichungssystem kann, wie bekannt, sehr leicht explizit aufgelöst werden. Wir wählen irgend eine ganze Zahl p unter den Zahlen $1, 2, \ldots, m-1$, multiplizieren die erste Gleichung mit $\sin 1\,p\,\lambda$, die zweite mit $\sin 2\,p\,\lambda, \ldots$, die letzte mit $\sin (m-1)\,p\,\lambda$, addieren sodann sämtliche Gleichungen und ordnen die so entstandene Gleichung nach den Koeffizienten b_k bzw. c_k. Unter Benützung der bekannten Formel

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin i\,k\,\lambda \sin i\,p\,\lambda = \begin{cases} m/2 & \text{für} \quad k=p\,, \\ 0 & \text{für} \quad k\neq p \end{cases} \tag{9}$$

ergibt sich, daß alle Beiwerte von b_k bzw. c_k für $k \neq p$ verschwinden bis auf $k=p$. Auf diese Weise erhalten wir

$$b_k = \frac{l}{2\,m}\,(1-\cos k\,\lambda)^{-1}\,c_k\,. \tag{10}$$

Setzt man in (6) den Ausdruck (10) für b_k ein, so erhält man die Werte M_i der Biegemomente an den äquidistanten Stellen eines durch Einzellasten P_i beanspruchten Balkens

$$M_i = \frac{l}{2\,m}\sum_{k=1}^{m-1} (1-\cos k\,\lambda)^{-1}\,c_k \sin i\,k\,\lambda\,. \tag{11}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Verschiebungen u_i an den äquidistanten Trägerstellen durch das trigonometrische Polynom

$$u_i = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \sin i\,k\,\lambda\,, \tag{12}$$

darstellen, wo die Koeffizienten a_k vorläufig unbestimmt sind. Wenn wir die Ausdrücke (12) und (4) in die Differenzengleichung (3) einsetzen und beachten, daß

$$\delta^4 f_i = 4\,(1-\cos k\,\lambda)^2 \sin i\,k\,\lambda\,, \qquad f_{i+1} + 4\,f_i + f_{i-1} = 2\,(2+\cos k\,\lambda)\sin i\,k\,\lambda \tag{13}$$

ist, so erhalten wir ein Gleichungssystem von $m-1$ linearen Gleichungen für die $m-1$ Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$

$$4\sum_{k=1}^{m-1} a_k\,(1-\cos k\,\lambda)^2 \sin i\,k\,\lambda = \frac{16}{m^3} f_B \sum_{k=1}^{m-1} c_k\,(2+\cos k\,\lambda)\sin i\,k\,\lambda \qquad (i=1,2,\ldots,m-1)\,.$$

Dieses Gleichungssystem kann auf dieselbe Weise wie das System (8) explizit gelöst werden; so ergibt sich

$$a_k = \frac{4}{m^3} f_B \frac{2+\cos k\,\lambda}{(1-\cos k\,\lambda)^2}\,c_k\,. \tag{14}$$

Setzt man in (12) den Ausdruck (14) für a_k ein, so erhält man die Verschiebungen u_i an den äquidistanten Stellen eines durch Einzellasten P_i beanspruchten Trägers

$$u_i = \frac{4}{m^3} f_B \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2+\cos k\,\lambda}{(1-\cos k\,\lambda)^2}\,c_k \sin i\,k\,\lambda\,. \tag{15}$$

b) Balken auf äquidistanten elastischen Stützen. Es sei ein an beiden Enden senkrecht unverschieblich gelagerter Balken von der Länge l gegeben, der in den äquidistanten Punkten $1, 2, \ldots, m-1$ elastisch gelagert und durch die Einzellasten P_i beansprucht ist (Abb. 2), wobei linearer Zusammenhang zwischen Verschiebung u_i und Stützenkraft R_i vorausgesetzt sei, derart, daß

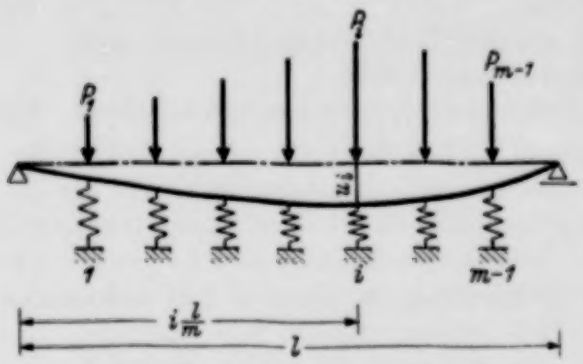


Abb. 2. Elastisch gestützter Durchlaufträger mit Einzellasten.

$$u_i = f_s R_i \tag{16}$$

ist und mit f_s die Verschiebung der elastischen Stütze infolge $R_i = 1$ bezeichnet wird.

Zur Bildung eines statisch bestimmten Systems beseitigen wir die $m-1$ mittleren elastischen Stützen. In diesen Punkten 1 bis $m-1$ bringen wir die statisch unbestimmten Stützenwiderstände R_i als Belastung an, die mit den vorgegebenen Einzellasten P_i die resultierenden Einzelkräfte

$$Q_i = P_i - R_i \tag{17}$$

ergeben. Die vorgegebenen Größen der Einzellasten P_i können wir in Form (4) eines trigonometrischen Polynoms darstellen, dessen Koeffizienten durch (5) bestimmt sind. Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Stützenwiderstände R_i in Form

$$R_i = \sum_{k=1}^{m-1} c_{k1} \sin i\,k\,\lambda \tag{18}$$

ausdrücken, wo die Koeffizienten c_{k1} vorläufig noch unbekannt sind. Setzt man in (16) den Ausdruck (18) für R_i ein, so erhält man

$$u_i = f_s \sum_{k=1}^{m-1} c_{k1} \sin i\,k\,\lambda\,. \tag{19}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke (4) und (18) in (17) erhält man

$$Q_i = \sum_{k=1}^{m-1} (c_k - c_{k1}) \sin i\,k\,\lambda\,. \tag{20}$$

Setzt man nun die Ausdrücke (19) und (20) in die Differenzengleichung (3) ein, wobei an Stelle von P_i der Ausdruck (20) für Q_i einzusetzen ist, so erhält man ein System von $m-1$ linearen Gleichungen mit $m-1$ Unbekannten c_{k1}

$$4 f_s \sum_{k=1}^{m-1} c_{k1} (1 - \cos k\,\lambda)^2 \sin i\,k\,\lambda = \frac{16}{m^3} f_B \sum_{k=1}^{m-1} (c_k - c_{k1})(2 + \cos k\,\lambda) \sin i\,k\,\lambda$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m-1)\,.$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf dieselbe Weise wie das System (8), so erhält man

$$c_{k1} = \left[1 + \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} \frac{(1 - \cos k\,\lambda)^2}{2 + \cos k\,\lambda}\right]^{-1} c_k\,. \tag{21}$$

Setzt man in (18) den Ausdruck (21) für c_{k1} ein, so ergibt sich

$$R_i = \sum_{k=1}^{m-1} \left[1 + \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} \frac{(1 - \cos k\,\lambda)^2}{2 + \cos k\,\lambda}\right]^{-1} c_k \sin i\,k\,\lambda\,. \tag{22}$$

Nun sind die resultierenden Einzelkräfte Q_i durch die Gleichungen (20), (5) und (21) bestimmt, und es ist leicht, die Stützmomente M_i mit Hilfe (11) zu ermitteln, wobei an Stelle von c_k die Differenz $c_k - c_{k1}$ eingesetzt werden soll. Auf diese Weise ergibt sich

$$M_i = \frac{l}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} \left[1 - \cos k\,\lambda + \frac{4}{m^3} \frac{f_B}{f_s} \frac{2 + \cos k\,\lambda}{1 - \cos k\,\lambda}\right]^{-1} c_k \sin i\,k\,\lambda\,. \tag{23}$$

c) Beispiele.

1. *Eine Einzellast über eine elastische Stütze.* Mit Rücksicht auf (9) ist leicht zu erkennen, daß der Ausdruck

$$P_i = \frac{2}{m} P_p \sum_{k=1}^{m-1} \sin k\,p\,\lambda \sin k\,i\,\lambda \tag{24}$$

für alle Trägerstellen $i \neq p$ verschwindet und nur an der Stelle $i = p$ den Wert P_p annimmt und somit die vorgegebene Belastung (Abb. 3) in den diskreten Punkten 1, 2, . . . , $m-1$ darstellt. Dementsprechend können wir schreiben

$$P_i = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sin i\,k\,\lambda\,,$$

wo

$$c_k = \frac{2}{m} P_p \sin k\,p\,\lambda \tag{25}$$

ist. Setzt man (25) in die Gleichungen (22) und (23) ein, so folgt

$$R_{ip} = \frac{2}{m} P_p \sum_{k=1}^{m-1} \left[1 + \frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B}\frac{(1-\cos k\,\lambda)^2}{2+\cos k\,\lambda}\right]^{-1} \sin p\,k\,\lambda \sin i\,k\,\lambda\,,$$

$$M_{ip} = \frac{P_p\,l}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \left[1 - \cos k\,\lambda + \frac{4}{m^3}\frac{f_B}{f_s}\frac{2+\cos k\,\lambda}{1-\cos k\,\lambda}\right]^{-1} \sin k\,p\,\lambda \sin i\,k\,\lambda\,,$$

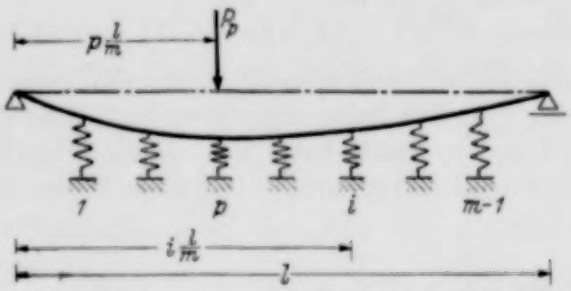


Abb. 3. Elastisch gestützter Durchlaufträger mit Einzellast.

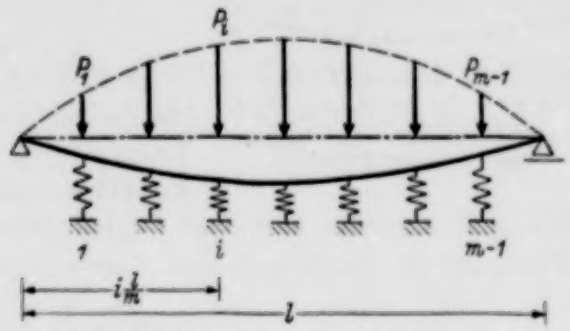


Abb. 4. Sinusförmige Verteilung der Einzellasten.

wobei die Indexbezeichnung so durchgeführt ist, daß der erste Index den Ort, der zweite die Ursache angibt.

2. *Gleiche Einzellasten an sämtlichen Auflagerpunkten der elastischen Zwischenstützen.* Unter Berücksichtigung, daß

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_{m-1} = P$$

ist, folgt mit Hilfe der Formel

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin i\,k\,\lambda = \sin^2 \frac{k\,\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{k\,\lambda}{2}$$

aus (5)

$$c_k = \frac{2\,P}{m} \sin^2 \frac{k\,\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{k\,\lambda}{2}\,. \tag{26}$$

Setzt man (26) in die Gleichungen (22) und (23) ein, so erhält man

$$R_i = \frac{2}{m} P \sum_{k=1}^{m-1} \left[1 + \frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B}\frac{(1-\cos k\,\lambda)^2}{2+\cos k\,\lambda}\right]^{-1} \operatorname{ctg} \frac{k\,\lambda}{2} \sin^2 \frac{k\,\pi}{2} \sin i\,k\,\lambda\,,$$

$$M_i = \frac{P\,l}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \left[(1-\cos k\,\lambda)^2 + \frac{4}{m^3}\frac{f_B}{f_s}(2+\cos k\,\lambda)\right]^{-1} \sin k\,\lambda \sin^2 \frac{k\,\pi}{2} \sin i\,k\,\lambda\,.$$

3. *Sinusförmige Verteilung der Einzellasten.* Die Größe P_i der Einzellast an der Trägerstelle i (Abb. 4) sei durch den Ausdruck

$$P_i = P \sin i\,n\,\lambda \tag{27}$$

gegeben, wo n irgendeine nicht durch m teilbare ganze Zahl bedeutet. Die vorgegebene Zahl n bestimmt eindeutig eine ganze Zahl j (> 0) durch die Bedingung

$$2\,j\,m < n < 2\,(j+1)\,m\,.$$

Mit einer so bestimmten Zahl j dürfen wir

$$n = 2\,j\,m + \nu \qquad \text{für} \qquad n < (2\,j+1)\,m\,, \tag{a}$$

$$n = 2\,(j+1)\,m - \nu \qquad \text{für} \qquad n > (2\,j+1)\,m\,, \tag{b}$$

schreiben, wobei ν eine ganze Zahl ($0 < \nu \leqq m-1$) ist. Mit obigen Werten von n kann man (27) in der Form

$$P_i = \pm P \sin i\,\nu\,\lambda \tag{28}$$

schreiben; hier gilt positives Vorzeichen für den Fall (a) und negatives für (b). Aus den Gleichungen (22) und (23) und mit Rücksicht auf (28) und (4) erhält man

$$R_i = \pm P\left[1 + \frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B}\frac{(1-\cos\nu\lambda)^2}{2+\cos\nu\lambda}\right]^{-1}\sin i\,\nu\,\lambda\,,$$

$$M_i = \pm \frac{P\,l}{2\,m}\left[1-\cos\nu\lambda + \frac{4}{m^3}\frac{f_B}{f_s}\frac{2+\cos\nu\lambda}{1-\cos\nu\lambda}\right]^{-1}\sin i\,\nu\,\lambda\,.$$

3. Balken auf elastischen Stützen mit kontinuierlicher Belastung. a) Durchbiegungen und Biegemomente an den äquidistanten Stellen eines frei gestützten Balkens. — Die Durchbiegung u eines freiaufliegenden Balkens von der Länge l, der im Abstande ξ vom linken Auflager eine Einzellast Q trägt, kann bekannterweise durch die trigonometrische Reihe

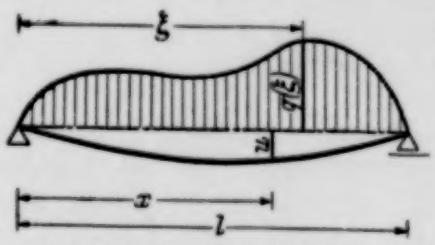


Abb. 5. Balken auf zwei Stützen mit kontinuierlicher Belastung.

$$u = \frac{96}{\pi^4}\,Q\,f_B\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{29}$$

dargestellt werden. Aus dieser Grundlösung ergibt sich sofort die Lösung für jede beliebig verteilte Belastung, derer Intensität q eine Funktion von ξ ist (Abb. 5). Dafür muß man in den Ausdruck (29) $Q = q\,d\xi$ einsetzen und über die belastete Balkenstrecke integrieren. Auf diese Weise erhält man

$$u = \frac{96}{\pi^4}\,f_B\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{30}$$

mit Abkürzung

$$A_k = \frac{1}{k^4}\int_0^l q(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi\,. \tag{31}$$

Wenn wir

$$x = x_i = \frac{i\,l}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots;\quad i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

in die Reihe (30) einsetzen, erhalten wir die Durchbiegung an den äquidistanten Trägerstellen

$$u_i = \frac{96}{\pi^4}\,f_B\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin i\,k\,\lambda\,. \tag{32}$$

Die Durchbiegungen u_i an den äquidistanten Trägerstellen lassen sich in Form eines trigonometrischen Polynoms

$$u_i = \frac{96}{\pi^4}\,f_B\sum_{k=1}^{m-1}a_k\sin i\,k\,\lambda \tag{33}$$

darstellen, wo die Koeffizienten a_k vorläufig noch unbestimmt sind. Wenn wir die Ausdrücke (32) und (33) gleichsetzen

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin i\,k\,\lambda = \sum_{k=1}^{m-1}a_k\sin i\,k\,\lambda\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{34}$$

so erhalten wir ein System von $m-1$ linearen Gleichungen mit $m-1$ Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Dieses Gleichungssystem kann auf dieselbe Weise wie das System (8) explizit aufgelöst werden. Wir wählen irgend eine ganze Zahl p unter den Zahlen $1, 2, \ldots, m-1$, multiplizieren die erste Gleichung mit $\sin 1\,p\,\lambda$, die zweite mit $\sin 2\,p\,\lambda, \ldots,$ die letzte mit $\sin(m-1)\,p\,\lambda$, addieren sodann sämtliche Gleichungen und ordnen die so entstandene Gleichung nach den Koeffizienten A_k bzw. a_k. Unter Benutzung der bekannten Formel

$$\sum_{i=1}^{m-1}\sin i\,k\,\lambda\sin i\,p\,\lambda = \begin{cases} m/2 & \text{für} \quad k = 2\,j\,m + p\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \\ -m/2 & \text{für} \quad k = 2\,j\,m - p\,, \quad j = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{für} \quad \text{alle übrigen Werte von } k\,, \end{cases}$$

und mit Hilfe der Beziehung

$$\sin(2jm \pm i)k\lambda = \pm \sin ik\lambda \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

ergibt sich sodann, daß sämtliche Beiwerte von A_k bzw. a_k für $k \neq 2jm \pm p$ bzw. $k \neq p$ verschwinden bis auf $k = 2jm \pm p$ bzw. $k = p$. Auf diese Weise erhalten wir

$$a_k = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2jm+k} - \sum_{j=1}^{\infty} A_{2jm-k}. \tag{35}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten A_k die Gleichung

$$A_{2jm\pm k} = \overset{+}{(-1)}^{r+1} \frac{k^r}{(2jm \pm k)^r} A_k \tag{36}$$

erfüllen, wo $j = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $r = 4, 5, \ldots$ sind, können wir dann den Ausdruck (35) in der Form

$$a_k = \varphi_{kr} A_k \tag{37}$$

schreiben, wobei die Abkürzung

$$\varphi_{kr} = k^r \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2jm + k)^{-r} \tag{38}$$

eingeführt ist. Die Reihe (38) läßt sich geschlossen auswerten, wie in Ziff. 4 gezeigt wird. Indem man (37) in (33) einsetzt, erhält man schließlich den Ausdruck für die Durchbiegung

$$u_i = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{kr} A_k \sin ik\lambda. \tag{39}$$

Differentiiert man die Reihe (29) zweimal nach x, so erhält man den Ausdruck für das Biegemoment

$$M = -EIu'' = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

oder an den äquidistanten Punkten

$$M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin ik\lambda, \tag{40}$$

wo

$$B_k = k^2 A_k \tag{41}$$

ist. Mit Rücksicht auf (41) und (36) erhält man

$$B_{2jm\pm k} = \overset{+}{(-1)}^{r+1} \frac{k^{r-2}}{(2jm \pm k)^{r-2}} B_k. \tag{42}$$

Auf ähnliche Weise läßt sich auch das Biegemoment M_i an den äquidistanten Trägerstellen in Form eines trigonometrischen Polynoms

$$M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{k,r-2} B_k \sin ik\lambda$$

ausdrücken. Mit Rücksicht auf (41) ergibt sich daraus

$$M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{k,r-2} k^2 A_k \sin ik\lambda. \tag{43}$$

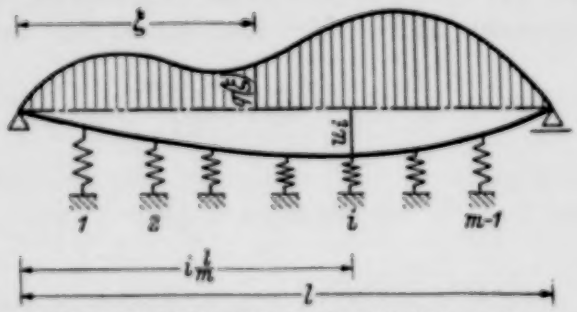


Abb. 6. Elastisch gestützter Durchlaufträger mit kontinuierlicher Belastung.

b) Balken auf äquidistanten elastischen Stützen. Es sei ein an beiden Enden senkrecht unverschieblich gelagerter Balken von der Länge l gegeben, der in den äquidistanten Punkten $1, 2, \ldots, i, \ldots, m-1$ elastisch gelagert und durch eine kontinuierliche Belastung von der Intensität $q(\xi)$ beansprucht wird (Abb. 6). Wenn wir mit u_i die Verschiebung der elastischen Stütze i, mit R_i den Stützdruck und mit f_s die Verschiebung dieser Stütze infolge $R_i = 1$ bezeichnen, dann gilt die Beziehung (16). Die unbekannten Stützedrücke R_i lassen sich in Form eines trigonometrischen Polynoms (18) darstellen, dessen Koeffizienten vorläufig unbestimmt sind. Aus (16) und (18) erhält man die Verschiebung u_i (19).

Die Durchbiegung u_{i0} eines Balkens auf zwei Stützen an der Trägerstelle i, d. h. im Abstande $i\,l/m$ vom linken Auflager, ist infolge einer kontinuierlichen Belastung von der Intensität $q(\xi)$ durch das Polynom (39) dargestellt. Die Durchbiegung u_{i1} eines Balkens auf zwei Stützen an derselben Trägerstelle i ist infolge von vorläufig noch unbekannten äquidistanten Stützkräften R_i durch das Polynom (15) ausgedrückt, wobei der Koeffizient c_{k1} an Stelle von c_k zu setzen ist.

Diese Verschiebungen müssen offensichtlich das Gleichungssystem

$$u_{i0} - u_{i1} = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{44}$$

erfüllen.

Setzt man nun die Ausdrücke (19), (15) und (39) für die Verschiebungen in (44) ein, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von $m-1$ Gleichungen für die $m-1$ Unbekannten $c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m-1,1}$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[f_s + \frac{4}{m^3} f_B \frac{2+\cos k\lambda}{(1-\cos k\lambda)^2}\right] c_{k1} \sin i\,k\lambda = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{kr} A_k \sin i\,k\lambda\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)\,. \tag{45}$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf dieselbe Weise wie das System (8), so erhält man

$$c_{k1} = \frac{24\,m^3}{\pi^4}\left[\frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B} + \frac{2+\cos k\lambda}{(1-\cos k\lambda)^2}\right]^{-1} \varphi_{kr} A_k\,. \tag{46}$$

Setzt man in (18) den Ausdruck (46) für c_{k1} ein, so erhält man

$$R_i = \frac{24\,m^3}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B} + \frac{2+\cos k\lambda}{(1-\cos k\lambda)^2}\right]^{-1} \varphi_{kr} A_k \sin i\,k\lambda\,. \tag{47}$$

Ist M_{i1} das Moment an der Trägerstelle i infolge der $m-1$ Stützkräfte R_i, und setzen wir für c_k den Ausdruck (46) in (11) ein, so ergibt sich

$$M_{i1} = \frac{12\,m^2}{\pi^4} l \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B}(1-\cos k\lambda) + \frac{2+\cos k\lambda}{1-\cos k\lambda}\right]^{-1} \varphi_{kr} A_k \sin i\,k\lambda\,. \tag{48}$$

Ist M_{i0} das Moment an der Stelle i infolge der gegebenen Belastung $q(\xi)$ (43), so erhält man dann das endgültige Stützmoment durch Superposition

$$M_i = M_{i0} - M_{i1} = \frac{12\,m^2}{\pi^4} l \sum_{k=1}^{m-1}\left\{\frac{\pi^2}{6\,m^2}\varphi^0_{k,r-2} - \left[\frac{m^3}{4}\frac{f_s}{f_B}(1-\cos k\lambda) + \frac{2+\cos k\lambda}{1-\cos k\lambda}\right]^{-1}\varphi^0_{kr}\right\} k^r A_k \sin i\,k\lambda\,, \tag{49}$$

wobei zur Abkürzung

$$\varphi^0_{kr} = \varphi_{kr}\,k^{-r} \tag{50}$$

gesetzt ist.

c) Der durchlaufende Balken auf äquidistanten starren Stützen. Setzt man $f_s = 0$ in (47) und (49) ein, so ergeben sich die Ausdrücke für die inneren Auflagerkräfte R_i und die Stützmomente M_i eines durchlaufenden Balkens auf äquidistanten starren Stützen

$$R_i = \frac{24\,m^3}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(1-\cos k\lambda)^2}{2+\cos k\lambda} \varphi_{kr} A_k \sin i\,k\lambda\,, \tag{51}$$

$$M_i = \frac{12\,m^2}{\pi^4} l \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{\pi^2}{6\,m^2}\varphi^0_{k,r-2} - \frac{1-\cos k\lambda}{2+\cos k\lambda}\varphi^0_{kr}\right] k^r A_k \sin i\,k\lambda\,. \tag{52}$$

d) Die Belastungsfunktionen $q(\xi)$, welche die Bedingung (36) erfüllen. Für einige, in der technischen Anwendung sehr oft vorkommende Belastungsfälle, ist die Bedingung (36) erfüllt. Nehmen wir, z. B. an, daß die Belastungsfunktion in der Form eines Polynoms

$$q(\xi) = q_0\,P_n(\xi) = q_0\,(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n) \tag{53}$$

gegeben sei. Nach Einsetzen des Ausdruckes (53) in (31), erhält man durch partielle Integration

$$A_k = \frac{q_0\,l}{\pi\,k^5}\left\{[P_n(0) - P_n(l)\cos k\pi] - \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 [P''_n(0) - P''_n(l)\cos k\pi] + \cdots\right\}. \tag{54}$$

Mit Rücksicht auf (54) ergibt sich, daß für $n < 2$, d. h. für die gleichmäßige ($n = 0$) und für die hydrostatische Belastung ($n = 1$) die Bedingung (36) offensichtlich erfüllt ist. Auch wenn

$n \geqq 2$ ist — solche Belastungsfälle kommen in der technischen Praxis sehr selten vor — kann die Bedingung (36) erfüllt werden, z. B., wenn die Koeffizienten des Polynoms die Gleichungen

$$P_n^{(p)}(0) = 0\,, \qquad P_n^{(p)}(l) = 0$$

für

$$p = 0, 2, 4, \ldots, \mu - 2\,, \qquad \mu = n - \frac{1}{2}\,[1 - (-1)^n]$$

erfüllen.

Belastung $q(\xi)$		A_k
a	q_0	$\frac{2q_0 l}{\pi}\,\frac{1}{k^3}\,\sin^2\frac{k\pi}{2}$
b	q_0	$\frac{2q_0 l}{\pi}\,\frac{1}{k^3}\,\sin kp\lambda\,\sin ks\lambda$
c	$q_0\,\frac{\xi}{l}$	$\frac{q_0 l}{\pi}\,\frac{1}{k^3}\,\cos(k+1)\pi$

Für eine Streckenlast q_0, gemäß Tabelle (Abb. b), wo p und s ganze Zahlen sind, ergibt sich aus (31)

$$A_k = \frac{2\,q_0\,l}{\pi}\,\frac{1}{k^3}\,\sin k\,p\,\lambda\,\sin k\,s\,\lambda\,.$$

Dieser Koeffizient erfüllt offensichtlich die Bedingung (36). In Tabelle sind einige in der technischen Praxis oft vorkommende Belastungsfälle angegeben, deren Koeffizienten A_k die Bedingung (36) erfüllen.

e) Beispiele.

1. *Der Durchlaufträger auf elastischen Stützen mit den in Tabelle dargestellten Belastungen.* Setzt man in (47) und (49) den Ausdruck für φ_{kr}^0 $(r = 5)$ (s. Ziff. 4) ein, so lassen sich mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{m^3}{4}\,\frac{f_s}{f_B}$$

die Ausdrücke für die Stützdrücke R_i und die Biegemomente M_i in der Form

$$R_i = \frac{\pi}{2\,m^2}\sum_{k=1}^{m-1} k^5\,A_k\,\frac{5 + \cos k\,\lambda}{2 + \cos k\,\lambda + \beta\,(1 - \cos k\,\lambda)^2}\,\operatorname{ctg}\frac{k\,\lambda}{2}\,\sin i\,k\,\lambda\,,$$

$$M_i = \frac{\pi}{4\,m^3}\,l\sum_{k=1}^{m-1} k^5\,A_k\,\frac{2\,\beta\,(1 - \cos k\,\lambda) - 1}{2 + \cos k\,\lambda + \beta\,(1 - \cos k\,\lambda)^2}\,\operatorname{ctg}\frac{k\,\lambda}{2}\,\sin i\,k\,\lambda$$

schreiben, wobei die Koeffizienten A_k in Tabelle angegeben sind. Setzt man $\beta = 0$ in obige Ausdrücke ein, so erhält man die Stützkräfte und Stützmomente eines durchlaufenden Trägers auf starren Stützen

$$R_i = \frac{\pi}{2\,m^2}\sum_{k=1}^{m-1} k^5\,A_k\,\frac{5 + \cos k\,\lambda}{2 + \cos k\,\lambda}\,\operatorname{ctg}\frac{k\,\lambda}{2}\,\sin i\,k\,\lambda\,,$$

$$M_i = -\,\frac{\pi}{4\,m^3}\,l\sum_{k=1}^{m-1} k^5\,A_k\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{k\,\lambda}{2}}{2 + \cos k\,\lambda}\,\sin i\,k\,\lambda\,.$$

2. *Sinusförmig verteilte Belastung* (Abb. 7). Für den betrachteten Fall ist die Belastungsfunktion $q(\xi)$ durch den Ausdruck

$$q = q_0\,\sin\frac{n\,\pi\,\xi}{l}$$

gegeben, wobei n irgendeine nicht durch m teilbare ganze Zahl bedeutet. Der Ausdruck für die Verschiebung u_{i0} eines Balkens auf zwei Stützen lautet infolge dieser Belastung bekannterweise

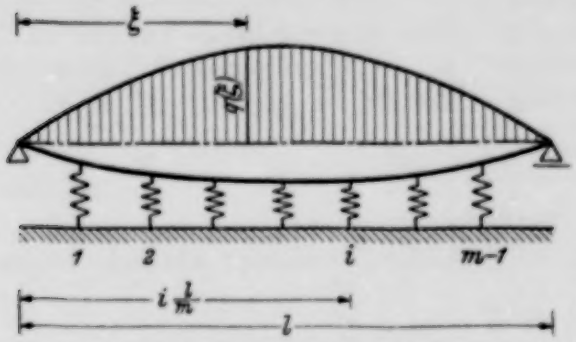


Abb. 7. Sinusförmig verteilte Belastung.

$$u_{i0} = \frac{48}{n^4 \pi^4} f_B q_0 \, l \sin i \, n \, \lambda \, .$$

Wenn wir das gleiche Verfahren wie im Beispiel 3 von Ziff. **2** anwenden, ergibt sich

$$u_{i0} = \pm \frac{48}{n^4 \pi^4} f_B q_0 \, l \sin i \, \nu \, \lambda \, .$$

Setzt man diesen Ausdruck in (44) ein, so erhält man nach den im Ziff. **3b)** beschriebenen Verfahren die Ausdrücke für die Stützkräfte R_i und Biegemomente M_i

$$R_i = \pm \frac{12 \, m^3}{n^4 \pi^4} q_0 \, l \left[\beta + \frac{2 + \cos \nu \lambda}{(1 - \cos \nu \lambda)^2}\right]^{-1} \sin i \, \nu \, \lambda \, ,$$

$$M_i = \frac{6 \, m^2}{n^4 \pi^4} q_0 \, l^2 \left\{\frac{n^2 \pi^2}{6 \, m^2} \mp \left[\beta \, (1 - \cos \nu \lambda) + \frac{2 + \cos \nu \lambda}{1 - \cos \nu \lambda}\right]^{-1}\right\} \sin i \, \nu \, \lambda \, ,$$

wobei positives Vorzeichen für den Fall (a) und negatives für (b) gilt, [s. Beispiel 3 von Ziff. **2**] .

4. Geschlossene Auswertung der Reihensumme[1]. Durch gliederweise $(r - 1)$-malige Differentiation der bekannten Reihe

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (j \pi + x)^{-1}$$

ergibt sich

$$(\operatorname{ctg} x)^{(r-1)} = (-1)^{r-1} (r - 1)! \sum_{j=-\infty}^{\infty} (j \pi + x)^{-r} \, . \tag{55}$$

Setzt man $x = k \pi / 2 m$ in (55) ein, so erhält man nach einigen Umformungen, folgende, hier bis $r = 5$ angeführte, geschlossene Ausdrücke

$$\varphi^0_{k1} = \frac{\lambda}{2} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2} \, , \qquad \varphi^0_{k4} = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 (2 + \cos k \lambda) \, (1 - \cos k \lambda)^{-2} \, ,$$

$$\varphi^0_{k2} = 2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 (1 - \cos k \lambda)^{-1} \, , \qquad \varphi^0_{k5} = \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^5 (5 + \cos k \lambda) \, (1 - \cos k \lambda)^{-2} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2}$$

$$\varphi^0_{k3} = 2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 (1 - \cos k \lambda)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2} \, ,$$

für die Reihe

$$\varphi^0_{kr} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2 \, j \, m + k)^{-r} \, .$$

(Eingegangen am 16. Mai 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. V. Bogunović, Beograd (Jugoslawien), Palmotićeva 31.

[1] *J. M. Klitchieff*, The Aeronautical Quarterly, 2, 1950, S. 157.

Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben veränderlicher Dicke

Von H. Wittmeyer

1. Einleitung. Die Ermittlung der Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben hat Bedeutung bei dem Entwurf von Dampfturbinenscheiben, wie *Grammel*[1] ausführlich dargestellt hat. Dort werden auch Lösungsmöglichkeiten für die zugehörige Differentialgleichung angegeben.

Nun kann die Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen einer Kreisscheibe ohne Knotendurchmesser auch als Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen eines Stabes aufgefaßt werden, wie weiter unten gezeigt wird. Daher liegt es nahe, die einfachen Formeln, die der Verfasser[2] in einer früheren Arbeit zur Berechnung der Torsionseigenfrequenzen eines Stabes hergeleitet hat, auf die Berechnung der Torsionseigenfrequenzen einer Kreisscheibe zu übertragen. Die auf diese Weise erhaltene später angeführte Grundformel ermöglicht in einfacher Weise die Berechnung der ersten drei Torsionseigenfrequenzen der Scheibe, falls sie an ihrem Innenrande starr eingespannt ist und keine träge Masse am Außenrande trägt. Mit einer weiteren Formel kann berechnet werden, wie sich die Grundeigenfrequenz ändert, falls man den Innenrand elastisch einspannt und den Außenrand mit einer trägen Masse (Beschaufelung) belegt.

2. Herleitung der Näherungsformel. Im folgenden seien dieselben Bezeichnungen wie von *Grammel* benutzt, wobei der Index o und der Index a besagen mögen, daß die betreffenden Größen am Innen- bzw. am Außenrand der Scheibe zu nehmen sind, nämlich r der radielle Abstand eines Scheibenpunktes von der Scheibendrehachse; $\psi(r)$ die Amplitude der sinusförmig von der Zeit abhängigen Torsionsschwingung eines Scheibenpunktes im Abstand r von der Scheibendrehachse um diese Achse, gemessen als Winkel im Bogenmaß; $y(r)$ die Scheibendicke; $\alpha = \alpha_k$ die k-te Eigenfrequenz der Scheibentorsionsschwingung; γ das spezifische Gewicht des Scheibenmaterials; g die Erdbeschleunigung; G der Schubmodul des Scheibenmaterials; ε die Bettungsziffer, die sich wie folgt berechnet: Ist M_0 ein am Innenrand angreifendes Torsionsmoment, bezogen auf die Drehachse und ϑ_0 die Drehung des Innenrandes um die Drehachse infolge des Momentes M_0, so ist $\varepsilon = M_0/(2\,\pi\, r_0^2\, y_0\, \vartheta_0)$, wie man leicht aus der „Technischen Dynamik", Seite 36, Gleichung (5) und (8) folgert. Ferner ist $\Theta = \frac{\beta}{2}\gamma\,\frac{r_a^3}{g}$ das Massenträgheitsmoment (bezogen auf die Scheibendrehachse) der trägen Randmasse (Beschaufelung) je Flächeneinheit des Außenrandes. Die meist kleine dimensionslose Zahl β wird „Gewichtsfaktor der Beschaufelung" genannt (siehe ebendort, S. 38).

Vernachlässigt man den Einfluß der Zentrifugalkraft, was nach *Grammel* (ebendort S. 35) bei der Bestimmung der Torsionseigenfrequenzen zulässig ist, so lautet die Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen ohne Knotendurchmesser [ebendort S. 33, Formel (9)]

$$\psi'' + \left(\frac{y'}{y} + \frac{3}{r}\right)\psi' + \lambda^2\,\psi = 0\,, \tag{1}$$

wobei Striche Ableitungen nach r bedeuten, mit den Eigenwerten

$$\lambda = \lambda_k = 2\,\pi\,\alpha_k \sqrt{\frac{\gamma}{g\,G}}\,. \tag{2}$$

Für den Innenrand ($r = r_0$) gilt [ebendort S. 36, Formel (5)]

$$G\,r\,\psi' - \varepsilon\,\psi = 0 \tag{3}$$

und für den Außenrand ($r = r_a$) [ebendort Formel (6)]

$$G\,r^2\,\psi' - 4\,\pi^2\,\alpha^2\,\Theta\,\psi = 0\,. \tag{4}$$

Durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren lassen sich die Gleichungen (1), (3) und (4) nach Einführung von $\mu = 4\,\pi^2\,\alpha^2$ auf die folgende selbstadjungierte Form bringen:

$$(G\,y\,r^3\,\psi')' + \mu\,\frac{\gamma}{g}\,y\,r^3\,\psi = 0\,, \tag{5}$$

[1] Siehe *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 29ff., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

[2] *H. Wittmeyer*, Forsch. Ing.-Wes. 24 (1958) S. 37.

$$-G\,y\,r^3\,\psi' + \varepsilon\,y\,r^2\,\psi = 0 \qquad (r = r_0)\,, \tag{6}$$

$$G\,y\,r^3\,\psi' - \mu\,y\,r\,\Theta\,\psi = 0 \qquad (r = r_a)\,. \tag{7}$$

Diese Gleichungen können gemäß meinen früheren Gleichungen[1] (1), (3), (8) und (9) als die Differentialgleichung nebst zugehörigen Randbedingungen für die Torsionsschwingungen eines Stabes von der Länge $r_a - r_0$ mit der Längskoordinate $r - r_0$ aufgefaßt werden, wenn man diesem Stabe die folgenden Baugrößen gibt: $G\,y\,r^3$ die Torsionssteifigkeit des Stabes, $(\gamma/g)\,y\,r^3$ das Massenträgheitsmoment des Stabes je Längeneinheit, $\varepsilon\,y_0\,r_0^2$ die Torsionsfederzahl der elastischen Einspannung des Stabes bei $r = r_0$ (Moment je Winkel im Bogenmaß), $y_a\,r_a\,\Theta$ das Massenträgheitsmoment, bezogen auf die Torsionsachse des Stabes, einer Masse am Stabende ($r = r_a$), μ das Quadrat einer Torsionseigenkreisfrequenz des Stabes.

Bei der Anwendung der Formeln aus meiner Arbeit (Abschnitt 3) auf diesen „Ersatzstab", der die gleichen Eigenfrequenzen wie die Scheibe hat, ergeben sich insofern einfache Verhältnisse, als die Verdrehsteifigkeit dem Trägheitsmoment je Längeneinheit proportional ist. Eine Scheibe mit $y = \text{konst.} \cdot r^{-3}$ entspricht einem Stabe mit konstantem Trägheitsmoment je Längeneinheit und konstanter Steifigkeit, eine sich weniger nach außen verjüngende Scheibe entspricht einem Stabe mit nach außen zunehmendem Trägheitsmoment je Längeneinheit und zunehmender Steifigkeit. Um insbesondere die letztgenannten, praktisch wichtigen Scheiben durch die Näherungsformeln erfassen zu können, wurde der Gültigkeitsbereich der Formel (68) meiner früheren Arbeit für die Kennwerte $\alpha_{Tk} = \alpha_{Tk}(L_T)$ und $t_2 = t_2(L_T)$ angegebenen Formeln entsprechend erweitert. Die einfache Anwendung meiner früheren Formeln auf den hier definierten Ersatztorsionsstab soll hier nicht im einzelnen ausgeführt werden. Das Resultat ist in den beiden nächsten Abschnitten dargestellt.

3. Torsionseigenfrequenzen einer Kreisscheibe mit fester Einspannung am Innenrand und mit freiem Außenrand. Die Dickenverteilung der Scheibe sei durch $y = y(r)$ mit viermal stetig differentiierbarem $y(r)$ gegeben. Ist die Scheibe bei $r = r_0$ fest eingespannt und bei $r = r_a$ frei, so berechnet man Näherungswerte für ihre drei ersten Torsionseigenfrequenzen α_1, α_2 und α_3 auf folgende Weise: Mit

$$r_1 = r_0 + 0{,}12\,(r_a - r_0)\,, \qquad r_2 = r_0 + 0{,}88\,(r_a - r_0) \tag{8}$$

bilde man

$$L_T = 2\,\lg \frac{r_1^3\,y(r_1)}{r_2^3\,y(r_2)} \tag{9}$$

und weiter

$$\alpha_{T1} = 0{,}25 + 0{,}076743\,L_T + 0{,}0057825\,L_T^2 - 0{,}00007882\,L_T^3\,, \tag{10}$$

$$\alpha_{T2} = 0{,}75 + 0{,}025581\,L_T + 0{,}0091235\,L_T^2 - 0{,}00010018\,L_T^3\,, \tag{11}$$

$$\alpha_{T3} = 1{,}25 + 0{,}015349\,L_T + 0{,}0056615\,L_T^2 - 0{,}00002878\,L_T^3\,. \tag{12}$$

L_T muß in dem Intervall

$$-5 \leqq L_T \leqq 1{,}7 \tag{13}$$

liegen. Dann wird

$$\alpha_k \approx \alpha_{Tk}\,\frac{1}{(r_a - r_0)}\sqrt{\frac{g\,G}{\gamma}} \qquad (k = 1, 2, 3)\,. \tag{14}$$

Falls

$$G_T = \left| \lg \frac{r_1^3\,y(r_1)\,r_2^3\,y(r_2)}{[r_m^3\,y(r_m)]^2} \right| \leqq 1{,}11\,\sqrt{\alpha_{T1}}\,, \qquad r_m = \frac{1}{2}\,(r_0 + r_a) \tag{14a}$$

ist, erhält man einen im allgemeinen besseren Näherungswert für α_1, wenn man in (14) für $k = 1$ die Ersetzung

$$\alpha_{T1} \to \bar{\alpha}_{T1} = \alpha_{T1} - 0{,}119\,G_T^2 \tag{14b}$$

vornimmt. Ändert sich dabei die Frequenz α_1 wesentlich, so wird von einer Anwendung von (14) für $k > 1$ und von (18) abgeraten. Ist (14a) nicht erfüllt, so können die Torsionseigenfrequenzen der betreffenden Scheibe mit den Formeln dieser Arbeit im allgemeinen nicht mit brauchbarer Genauigkeit berechnet werden. Dies ist das Ergebnis einer Reihe von Beispielrechnungen.

4. Änderung der Grundtorsionseigenfrequenz der Kreisscheibe infolge elastischer Einspannung des Innenrandes und Massenbelegung des Außenrandes. Der Innenrand sei mit der Bettungs-

[1] Siehe Fußnote 2 Seite 113.

ziffer ε elastisch eingespannt und der Außenrand mit einer Beschaufelung mit dem Gewichtsfaktor β versehen. Die Trägheitswirkung der Einspannung sei vernachlässigt und die Beschaufelung als starr angesehen. Zur Frequenzberechnung ermittle man zunächst unter Benutzung von L_T nach (9) den Wert

$$t_2 = 1 - 0{,}330938\, L_T + 0{,}0648817\, L_T^2 + 0{,}00006119\, L_T^3 . \tag{15}$$

Hiermit und mit α_{T1} nach (10) bestimme man

$$\Delta\alpha_{T1} = -\, t_2\, \alpha_{T1}\, \frac{r_a}{(r_a - r_0)} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{G}{\varepsilon}\, \frac{r_0}{r_a} \right) . \tag{16}$$

Mit

$$\alpha_{T1}^{*} = \alpha_{T1} + \Delta\alpha_{T1} \tag{17}$$

ergibt sich schließlich für die Grundtorsionseigenfrequenz α_1^{*} der am Innenrand elastisch eingespannten und am Außenrand mit träger Masse besetzten Scheibe

$$\alpha_1^{*} \approx \alpha_{T1}^{*}\, \frac{1}{(r_a - r_0)} \sqrt{\frac{g\,G}{\gamma}} . \tag{18}$$

Damit der Fehler von α_1^{*} höchstens etwa 1% (2%) größer ist als der von α_1, sollte die aus (16) zu berechnende Größe $|\Delta\alpha_{T1}/\alpha_{T1}|$ den Wert $0{,}085 + 0{,}0056\, L_T$ (bzw. $0{,}127 + 0{,}0064\, L_T$) nicht überschreiten. Dies ist das Ergebnis einer größeren Anzahl von Beispielrechnungen. Hinsichtlich ε ist diese Bedingung erfüllt, wenn der Wellenhalbmesser nicht wesentlich kleiner als der Innenhalbmesser der Scheibe sowie die größte Scheibendicke ist, und wenn der kleinste Abstand eines Schwingungsknotens der Welle von der Scheibe klein gegen den Scheibenhalbmesser ist. Sollte die Bedingung wegen eines zu großen β nicht erfüllt sein, so empfiehlt es sich (insbesondere, falls $L_T < 0$ ist), den Einfluß der Zusatzmasse am Außenrande mit Hilfe des *Dunkerley*schen Verfahrens zu erfassen.

5. Beispiele. Als erstes Beispiel für eine Frequenzberechnung wählen wir wie bei *Grammel* (ebendort Seite 38 unten) eine Stahlscheibe mit der Dickenverteilung $y = c\, r^{-3}$, wo c eine positive Konstante ist, mit starrer Einspannung am Innenrand mit dem Halbmesser $r_0 = 10$ cm und einer Beschaufelung mit dem Gewichtsfaktor $\beta = 1/20$ am Außenrand mit dem Halbmesser $r_a = 40$ cm Wie bei *Grammel* (ebendort Seite 34) sei $\sqrt{g\,G/\gamma} = 3{,}26 \cdot 10^5$ cm/s. Nach (9), (10), (15) und (17) wird $L_T = 1$, $\alpha_{T1} = 0{,}25$, $t_2 = 1$ und $\alpha_{T1}^{*} = 0{,}2417$, und damit wird die Grundtorsionseigenfrequenz der Scheibe ohne Beschaufelung nach (14) ungefähr gleich 2717 Hz und mit Beschaufelung nach (18) ungefähr gleich 2630 Hz. Diese Werte unterscheiden sich in den angegebenen Ziffern nicht von den zugehörigen exakten Werten.

Als zweites Beispiel sei dieselbe Scheibe mit der Abänderung untersucht, daß ihr Dickenverlauf durch $y = c\, r^{-1}$ dargestellt wird, wo c eine positive Konstante ist. Ohne Beschaufelung ergeben sich nach (14) folgende Torsionseigenfrequenzen, wobei in Klammern jeweils die relativen Fehler[1] gegenüber der exakten Lösung angegeben sind: $\alpha_1 \approx 1478$ Hz (0,16%), $\alpha_2 \approx 7970$ Hz (1,3%), $\alpha_3 \approx 13480$ Hz (0,5%). Eine Beschaufelung mit dem Gewichtsfaktor $\beta = 1/20$ setzt nach (18) die Grundtorsionseigenfrequenz auf $\alpha_1^{*} \approx 1394$ Hz (—0,2%) herab. Wird diese Scheibe außerdem am Innenrand elastisch mit einer Bettungsziffer $\varepsilon = 3\,G$ gelagert, so ergibt (18) als noch tiefere Grundeigenfrequenz $\alpha_1^{*} \approx 1110$ Hz (—1,6%)[2].

Als drittes Beispiel seien die drei ersten Torsionseigenfrequenzen der Scheibe mit dem „Sonderprofil" nach *Grammel* (ebendort Seite 39, Abb. 34) berechnet. Hier ist der Dickenverlauf durch $y = 10^4\, e^{r/15}\, r^{-3}$ gegeben, wo y und r in cm zu rechnen sind. Ferner ist $r_0 = 10$ cm und $r_a = 50$ cm. Ist die Stahlscheibe am Innenrand starr eingespannt und am Außenrand frei, so ergibt Formel (14) folgende Werte: $\alpha_1 \approx 1090$ Hz (—0,16%), $\alpha_2 \approx 5980$ Hz (—0,12%) und $\alpha_3 \approx 10\,112$ Hz (—0,02%). Daß diese letzten Näherungswerte so besonders genau werden, liegt daran, daß Formel (14) dadurch hergeleitet ist, daß das vorhandene Profil durch eines mit dem Dickenverlauf $y = c_1\, e^{c_2 r}\, r^{-3}$ approximiert wird, wo c_1 und c_2 geeignet gewählte Konstanten sind. Für „Sonderprofile" nach *Grammel* wird die Formel (14) also besonders genau.

Schließlich seien Näherungswerte für die Grundtorsionseigenfrequenzen von Scheiben mit dem Profil $y = Y = a\, e^{-\left(\frac{r}{c}\right)^p}$ berechnet, wo $c = 2{,}5\, r_a$, $r_0/r_a = 0{,}05\ (0{,}05)\ 0{,}25$ und $p = 1$ oder 2 ist. Exakte Werte zum Vergleich finden sich in einer kürzlich erschienenen Arbeit von *Tameroğlu*[3].

[1] Ein positives Zeichen bei dem Fehler bedeutet, daß der Näherungswert zu groß ist.

[2] Obgleich bei diesem Beispiel $|\Delta\alpha_{T1}/\alpha_{T1}|$ wesentlich größer ist, als dies nach unserer Empfehlung sein sollte, ist die Genauigkeit von α_1^{*} überraschend gut.

[3] S. *Tameroğlu*, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 212.

Schließt man die Profile mit $r_0/r_a = 0{,}05$ aus, so erfüllen alle übrigen die Ungleichung (14a). Wendet man auf diese übrigen die Formel (14) unter Beachtung von (14b) an, so erhält man die Grundtorsionseigenfrequenzen mit einem Fehler von absolut höchstens 2,1%. In den beiden wegen (14a) ausgeschlossenen Beispielen für $r_0/r_a = 0{,}05$ hätte man für $p = 1$ einen Fehler von —1,4% und für $p = 2$ einen Fehler von —10% erhalten. Die Beispiele von *Tameroğlu* zeigen, daß Profile mit kleinem r_0/r_a am leichtesten außerhalb des zulässigen Anwendungsbereiches der Formel (14) [mit oder ohne Berücksichtigung von (14b)] liegen können. Für $r_0/r_a \geqq 0{,}15$ ist der Fehler bei den Grundtorsionseigenfrequenzen für Scheiben mit den Profilen $y = Y$ in den angeführten Beispielen stets kleiner als 1%, falls in (14) die Ersetzung (14b) vorgenommen wird.

Es sei noch angemerkt, daß die Dickenverteilungen $y = y(r)$ in diesen Beispielen nur deshalb in so einfacher analytischer Form vorgegeben wurden, damit es möglich war, die zum Vergleich benötigten exakten Werte zu berechnen.

6. Schlußbemerkung. Die in dieser Arbeit hergeleiteten Formeln sind Anwendungsbeispiele für ein allgemeines Verfahren zur Aufstellung von Näherungsformeln für die Eigenwerte technischer Eigenwertprobleme, das der Verfasser dargestellt hat[1]. Nach geeigneter Erweiterung könnte man mit dieser Methode bei Bedarf auch entsprechende Näherungsformeln für die Dehnungsschwingungen einer Kreisscheibe aufstellen. In diesem Falle müßte man die gegebene Differentialgleichung nicht wie in meiner früheren Arbeit durch eine mit konstanten Koeffizienten approximieren, sondern durch eine etwas kompliziertere Differentialgleichung, die jedoch in die *Bessel*sche übergeführt werden kann.

(Eingegangen am 14. Juni 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *H. Wittmeyer*, Linköping (Schweden), Valkebogatan 14 A.

[1] *H. Wittmeyer*, J. Soc. Industrial and Applied Math. 6 (1958) S. 111.

Biegeeigenfrequenzen eines gelenkig gelagerten Balkens

Von H. Wittmeyer

1. Einleitung. Die Biege- und Torsionsfrequenzen von geraden Balken bzw. Stäben können — wie bekannt— ohne Schwierigkeit mit den Verfahren von *W. Ritz* und *R. Grammel* oder durch Iteration berechnet werden.

Für gewisse Randbedingungen kann man jedoch diese Frequenzen mit wesentlich geringerem Zeitaufwand berechnen, wenn man die einfachen Näherungsformeln benutzt, die der Verfasser in früheren Veröffentlichungen [1,2,3,4] hergeleitet hat. In Fortsetzung der durch diese Veröffentlichungen begonnenen Untersuchungsreihe wird in der vorliegenden Arbeit eine einfache Formel für die angenäherte Berechnung der Biegeeigenfrequenzen $f_{Bn,ex}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Balkens hergeleitet, dessen veränderliche Querschnittsgrößen zur Mitte zwischen den Auflagerpunkten symmetrisch sind.

Zur Herleitung der Näherungsformel wird im Prinzip die gleiche Methode angewandt wie in den oben erwähnten vier Veröffentlichungen. Diese Methode ist am allgemeinsten in der vierten dargestellt. In ihr approximiert man den ersten Eigenwert einer gegebenen Differentialgleichung durch den ersten Eigenwert einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Diese wird in geeigneter Weise aus einer ein- oder mehrparametrigen Schar solcher Differentialgleichungen ausgewählt.

Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Randbedingungen weichen insofern von den damals zugelassenen ab, als nunmehr an beiden Enden sowohl geometrische als auch dynamische (natürliche) Randbedingungen vorgeschrieben sind, während früher an einem Ende nur geometrische und am anderen nur dynamische Randbedingungen zugelassen waren. Bemerkenswert bei diesem Anwendungsbeispiel ist, daß man in ihm die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten aus einer zweiparametrigen Schar auswählen muß, während man bei den Beispielen der vier früheren Arbeiten des Verfassers stets mit einer einparametrigen Schar auskam.

In Abschnitt 2 wird zunächst die in dieser Arbeit hergeleitete Formel in einer praktisch unmittelbar anwendbaren Form dargestellt. Die Genauigkeit der Formel zeigen Beispiele in Abschnitt 3. Die Abschnitte 4 bis 6 enthalten die Herleitung der Formel.

2. Die Näherungsformel. Bei dem beiderseitig gelenkig gelagerten Balken der Länge $2\,l$ (Abb. 1) sei x der Abstand eines Querschnittes vom linken Auflager und $\xi = x/l$ die zugehörige dimensionslose Koordinate. Ferner sei

$$E\,I = K_B(x) = K_{BM}\,j(\xi) \tag{1}$$

die Biegesteifigkeit des Balkens, wo E der Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment, bezogen auf die Biegeachse, ist und

$$M(x) = M_M\,m(\xi) \tag{2}$$

die Masse des Balkens je Längeneinheit. Dabei besage der Index M, daß die betreffende Größe in Balkenmitte ($x = l$) zu nehmen ist. Im Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$ seien $j(\xi)$ und $m(\xi)$ positiv und im Intervall $0 \leqq \xi < 1$ zweimal stetig differentiierbar. Ferner sei $j(1+\xi) = j(1-\xi)$ und $m(1+\xi) = m(1-\xi)$ für $0 \leqq \xi \leqq 1$. Die Biegesteifigkeit und die Masse je Längeneinheit seien also zur Balkenmitte symmetrisch. In Balkenmitte wird die Stetigkeit der Ableitungen von $j(\xi)$ und $m(\xi)$ nicht gefordert.

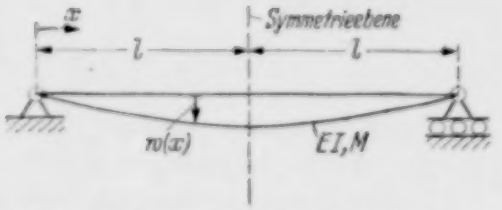


Abb. 1. Der beiderseitig gelenkig gelagerte, zur Mitte symmetrische Balken.

Zur Frequenzermittlung berechne man zunächst mit

$$B_i = \sqrt[4]{\frac{m(\xi_i)}{j(\xi_i)}}, \qquad \xi_i = \frac{i}{4} \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{3}$$

---

[1] *H. Wittmeyer*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 331.
[2] *H. Wittmeyer*, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956), S. 355.
[3] *H. Wittmeyer*, Forsch. Ing.-Wes. 24 (1958), S. 37.
[4] *H. Wittmeyer*, J. Soc. Industrial and Applied Math. 6 (1958), S. 111.

die Werte[1]

$$B = \frac{1}{12}(B_0 + 4\,B_1 + 2\,B_2 + 4\,B_3 + 1)\,, \tag{4}$$

$$\xi_B = \frac{B}{2\,(B_0 + B_1)}\,, \tag{5}$$

$$L_p = \{\lg\,[m(\xi_B)\,j(\xi_B)]\}^2\,, \tag{6}$$

$$L_q = \lg\frac{j(0)}{m(0)}\,. \tag{7}$$

Tabelle 1. *Interpolationstabelle für die in (9) und (10) benötigten Funktionen* $F_1 = 0{,}62666 - 0{,}012556\,L_p + 0{,}0001097\,L_p^2$; $F_2 = 1{,}25331 - 0{,}014522\,L_p + 0{,}0000588\,L_p^2$.

L_p	F_1	ΔF_1	F_2	ΔF_2
0	0,6267		1,2533	
		−125		−145
1	0,6142		1,2388	
		−122		−144
2	0,6020		1,2244	
		−120		−142
3	0,5900		1,2102	
		−118		−140
4	0,5782		1,1962	
		−116		−140
5	0,5666		1,1822	
		−113		−139
6	0,5553		1,1683	
		−111		−137
7	0,5442		1,1546	

Im folgenden wird vorausgesetzt[2]:

$$L_p \leqq 7\,, \quad -3{,}5 \leqq L_q \leqq 0\,, \tag{8}$$

Dann ermittle man mit $F_i(L_p)$ $(i = 1, 2)$ nach Tabelle 1 die Größen

$$\alpha_1 = F_1(L_p) - L_q\,(0{,}073100 - 0{,}0011195\,L_p) + L_q^2\,(0{,}001806 + 0{,}0000610\,L_p)\,, \tag{9}$$

$$\alpha_2 = F_2(L_p) + L_q^2\,(0{,}005275 - 0{,}0000181\,L_p) \tag{10}$$

und weiter für ungerade $n > 1$

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{8}\,n^2 + L_p\left(0{,}093758 - 0{,}119377\,\frac{1}{n}\right) - L_q\,(0{,}091617 - 0{,}013185\,L_q)\,, \tag{11}$$

sowie für gerade $n > 2$

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{8}\,n^2 + L_p\left(0{,}093758 - 0{,}238754\,\frac{1}{n}\right) + 0{,}013185\,L_q^2\,. \tag{12}$$

Mit

$$\beta_n = \left(\frac{\alpha_n}{B}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{13}$$

erhält man schließlich als Näherungswerte f_{Bn} für sämtliche Biegeeigenfrequenzen $f_{Bn,\,ex}$ des Balkens die Werte

$$f_{Bn} = \beta_n\,\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{K_{BM}}{M_M}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{14}$$

Wie sich später ergeben wird, liefern diese Formeln die genauesten Werte für die Grundbiegeeigenfrequenz $(n = 1)$ und für die Eigenfrequenzen höherer Ordnungszahl n. Besonders gute Genauigkeit ist zu erwarten, falls $j(\xi)$ und $m(\xi)$ monotone Funktionen sind, da die Massen- und Steifigkeitsverläufe, für die (14) exakt gilt (s. Abschnitt 7), ebenfalls monoton sind.

Die Genauigkeit der Frequenzen f_{Bn} ist für gerade n etwas unsicher. Die entsprechenden Formeln sind hier nur wegen des Fehlens besserer, gleicher Einfachheit angegeben.

[1] Hier und im folgenden bedeutet lg den Logarithmus zur Basis 10 und ln den Logarithmus zur Basis e.

[2] Der zweite Teil von (8) enthält die Forderung, daß das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Masse je Längeneinheit in der Mitte nicht kleiner sein darf als an den Enden. Diese Forderung dürfte in der Praxis im allgemeinen erfüllt sein.

Ersetzt man bei einem Balken M durch K_B^{-1} und K_B durch M^{-1} so ersieht man aus (1) bis (14), daß sich f_{Bn} dadurch nicht ändert. Dieselbe Eigenschaft hat auch der exakte Wert $f_{Bn,ex}$, wie man nach dem Vorgang von *Hohenemser*[1] direkt aus der Differentialgleichung für den schwingenden Balken herleiten kann.

3. Beispiele.[2] In den Beispielen zur Anwendung der Formel (14) sind Näherungswerte f_{Bk} für die Biegeeigenfrequenzen $f_{Bn,ex}$ eines beiderseitig gelenkig gelagerten Stabes der Länge $2\,l$ berechnet, dessen Querschnittswerte zur Mitte zwischen den beiden Auflagern symmetrisch sind. Die Frequenzbeiwerte β_n nach (13) sind mit den entsprechenden exakten Werten

$$\beta_{n,ex} = f_{Bn,ex}\, l^2 \sqrt{\frac{M_M}{K_M}} \tag{15}$$

verglichen und die relativen Fehler

$$\varphi_n = \frac{\beta_n - \beta_{n,ex}}{\beta_{n,ex}} \tag{16}$$

Tabelle 2. *Exakte Frequenzbeiwerte $\beta_{n,ex}$ und relative Fehler φ_n der zugehörigen Näherungswerte β_n nach* (13) *für sieben beiderseitig gelenkig gelagerte, zur Mitte symmetrische Balken.*

Balken Nr.	Form einer Balkenhälfte	Dimensionslose Biegesteifigkeit nach (1) $j(\xi)$	Dimensionslose Masse je Längeneinheit nach (2) $m(\xi)$	Parameter C	Exakte Frequenzbeiwerte nach (15)				Relative Fehler in Prozenten nach (16) bei Anwendung der Näherungsformel (14)			
					$\beta_{1,ex}$	$\beta_{2,ex}$	$\beta_{3,ex}$	$\beta_{4,ex}$	φ_1 (%)	φ_2 (%)	φ_3 (%)	φ_4 (%)
1	Trapezförmiges Federblech konstanter Dicke	$\frac{1+C\xi}{1+C}$	$\frac{1+C\xi}{1+C}$	2	0,3872	1,554	3,55		—0,05	0,2	0,3	
2				4	0,3832	1,539			—0,11	0,6		
3				10	0,3779	1,516	3,54	6,26	—0,13	1,2	1,4	1
4	Von zwei Parabelbögen begrenztes Federblech konstanter Dicke	$\frac{4-3(\xi-1)^2}{4}$	$\frac{4-3(\xi-1)^2}{4}$	—	0,3891	1,555	3,52		0	0,5	0,7	
5	Dünnwandiger Hohlkegelstumpf konstanter Wandstärke	$\frac{(1+C\xi)^3}{(1+C)^3}$	$\frac{1+C\xi}{1+C}$	2	0,2828	0,954			—0,01	—1,0		
6				4	0,2446	0,783			—0,01	—1,8		
7				10	0,1997	0,601	1,70	2,83	—1,1	—3,8	0,3	—4,3

von β_n ermittelt. Die für verschiedene Balken errechneten Werte $\beta_{n,ex}$ und φ_n (diese in Prozenten ausgedrückt) sind in Tabelle 2 aufgeführt. Die Genauigkeit der Näherungsformel erweist sich in diesen Beispielen für den Grundton bei einem Fehler von absolut genommen höchstens 1,1% als recht befriedigend. Die berechneten Obertöne f_{Bn} niedriger Ordnungszahl n zeigen geringere Genauigkeit. Die bis zu $n = 4$ berechneten Oberfrequenzen f_{Bn} des Balkens Nr. 7 mit stark veränderlichem Querschnitt weisen Fehler bis zu absolut genommen 4% auf. Besonders schlechte Genauigkeit haben bei diesem Balken die Frequenzen mit gerader Ordnungszahl n. Daß dies kein Zufall ist, zeigt die Herleitung der diesbezüglichen Formel in Abschnitt **6**. Wie bereits erwähnt wurde und genauer aus den späteren Ableitungen in den Abschnitten **5** und **6** hervorgehen wird, kann man für sehr große n wieder eine bessere Genauigkeit der Näherungswerte f_{Bn} erwarten.

Entsprechend der Bemerkung am Schluß des Abschnittes **2** ändern sich sowohl die exakten Frequenzbeiwerte $\beta_{n,ex}$ der hier angeführten Beispiele als auch ihre Näherungswerte β_n nach (13) nicht, wenn man m durch j^{-1} und j durch m^{-1} ersetzt. Auf diese Weise kann man die Anzahl der

[1] K. *Hohenemser*, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik. Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete, Bd. 1, H. 4. S. 54 u. S. 68: „Die Reziprozität von Masse und und Steifigkeit", Berlin 1933.

[2] Diese Beispiele sowie die hierfür benötigten Funktionen und Konstanten in den Abschnitten 4 b) und 6 wurden von Herrn Ing. *G. Andersson* und Herrn *B. Franzén* berechnet.

Beispiele ohne weitere Rechenarbeit verdoppeln. Die so erhaltenen neuen Beispiele betreffen dann Balken, die in ihrer Mitte eine kleinere Masse je Längeneinheit und eine kleinere Biegesteifigkeit haben als an den Enden. Das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Masse je Längeneinheit ist jedoch auch bei den neuen Beispielen in der Mitte nicht kleiner als an den Enden.

Die in Tabelle 2 aufgeführten „exakten Werte" $\beta_{n,ex}$ wurden durch hinreichend oft wiederholte Iteration mit anschließendem *Ritz*schen Verfahren berechnet, wobei alle vorkommenden Integrationen mittels der Trapezregel durchgeführt wurden. Um den Einfluß der hierbei benutzten Schrittlänge $\Delta\xi$ von ξ auf die Resultate so weit wie möglich zu eliminieren, wurden die Frequenzen für die drei Schrittlängen $\Delta\xi = 0{,}1$; 0,05 und 0,025 berechnet, als quadratische Funktionen von $(\Delta\xi)^2$ dargestellt und nach $(\Delta\xi)^2 = 0$ extrapoliert. Der durch diese Extrapolation erhaltene Wert wurde als der „exakte Wert" angesehen. Um zu zeigen, wie der durch numerische Integration erhaltene Näherungswert $\bar{\beta}_1$ für $\beta_{1,exakt}$ von der Schrittlänge $\Delta\xi$ abhängt, ist in Tabelle 3 der Wert $\bar{\beta}_1$ als Funktion von $\Delta\xi$ für den Balken Nr. 1 aus Tabelle 2 aufgeführt. In der letzten Spalte von Tabelle 3 ist der durch Extrapolation gefundene „exakte Wert" angegeben. Man sieht, daß durch diese Extrapolation bereits die dritte geltende Ziffer geändert wird.

Tabelle 3. *Abhängigkeit des durch Iteration mit anschließendem Ritzschen Verfahren gewonnenen Näherungswertes $\bar{\beta}_1$ für den Frequenzbeiwert $\beta_{1,ex}$ von der Schrittlänge $\Delta\xi$ bei den numerischen Integrationen. (Balken Nr. 1 aus Tabelle 2.)*

Schrittlänge $\Delta\xi$	0,1	0,05	0,025	0 (extrapoliert)	„Exakter Wert"
Näherungswert $\bar{\beta}_1$	0,38871	0,38760	0,38731	0,38721	$\beta_{1,ex} = 0{,}3872$

4. Herleitung der Näherungsformel (14) für die Grundbiegeeigenfrequenz. a) Formulierung der Aufgabe als Variationsproblem I. Die zu $x = l$ symmetrische Durchbiegungsamplitude $w = w(x)$ ist wegen der vorausgesetzten Symmetrie von $K_B(x)$ und $M(x)$ Lösung des bekannten Variations-Eigenwertproblems

$$\delta \int_0^l \frac{1}{2} [K_B (w'')^2 - \lambda M w^2]\, dx = 0\,, \tag{17}$$

wobei Striche Ableitungen nach x bedeuten, mit den geometrischen Randbedingungen

$$w = 0 \qquad (x = 0)\,, \tag{18}$$

$$w' = 0 \qquad (x = l)\,. \tag{19}$$

Die hier vorgenommene Beschränkung auf symmetrische Schwingungsformen werden wir zwecks Vereinfachung im ganzen Abschnitt 4 beibehalten und auch noch in Abschnitt 5 voraussetzen.

Die Eigenwerte $\lambda = \lambda_k$ hängen mit den exakten Eigenfrequenzen des Balkens der Länge $2\,l$ wie folgt zusammen:

$$\lambda_k = (2\pi f_{B,2k-1,ex})^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{20}$$

Durch die angeführte Beschränkung haben wir also zunächst die Eigenfrequenzen $f_{Bn,ex}$ mit gerader Ordnungszahl n ausgeschlossen. Durch die Transformation

$$w = q_1, \quad w' = q_2, \quad w'' = q_3 \tag{21}$$

führen wir statt $w(x)$ und seiner Ableitungen die drei Funktionen q_1, q_2 und q_3 ein. Sie hängen durch die Beziehungen

$$q_1' - q_2 = 0, \quad q_2' - q_3 = 0 \tag{22}$$

zusammen. Um die Funktionen q_1, q_2 und q_3 in dem transformierten Variationsproblem unabhängig voneinander variieren zu können, addieren wir unter dem Integralzeichen von (17) die linken Seiten der Gleichungen (22), noch multipliziert mit *Lagrange*schen Faktoren p_1 bzw. p_2. Damit ergibt die Transformation (21) schließlich

$$\delta \int_0^l \frac{1}{2} [(K_B q_3^2 - \lambda M q_1^2 + 2 p_1 (q_1' - q_2) + 2 p_2 (q_2' - q_3)]\, dx = 0 \tag{23}$$

mit den Randbedingungen

$$q_1 = 0 \qquad (x = 0)\,, \qquad\qquad q_2 = 0 \qquad (x = l)\,. \tag{24}$$

In einer kleinen Zwischenbetrachtung sei die physikalische Bedeutung der hier eingeführten Größen p_1 und p_2 geklärt. Dazu schreiben wir die *Euler*schen Gleichungen von (26) auf, die durch Variation von q_2 und q_3 entstehen:

$$p_1 + p_2' = 0\,, \tag{25}$$

$$K_B\, q_3 - p_2 = 0\,. \tag{26}$$

Hieraus folgt bei Beachtung von (21)

$$p_1 = -\,(K_B\, w'')'\,, \qquad p_2 = K_B\, w''\,. \tag{27}$$

Bei geeigneter Vorzeichenfestsetzung stellt also die Größe p_1 die Querkraft und die Größe p_2 das Biegungsmoment dar. In der folgenden Herleitung arbeiten wir also gleichzeitig mit den Deformationen q_1, q_2 und q_3 sowie den zu den beiden ersten gehörenden „generalisierten Kräften" p_1 und p_2. Der Gedanke, diese Größen bei der Berechnung von Biegeeigenfrequenzen gleichzeitig zu benutzen, findet sich bereits bei *Myklestad*[1] und geht auf einen Gedanken von *Holzer*[2] zurück[3], der vor *Mykelstad* ein entsprechendes Verfahren bei Torsionsschwingungen anwandte. In neuerer Zeit wird dieser Gedanke in steigendem Maße benutzt[4,5,6].

Nun transformieren wir das Variationsproblem (23), (24) in eine Gestalt, bei der nur noch „weniger wichtige" Koeffizienten von der unabhängigen Variablen abhängen. „Weniger wichtig" sind dabei solche Koeffizienten, deren Abänderung das asymptotische Verhalten der Eigenwerte in erster Näherung nicht ändert. Eine solche Transformation, die p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, x und λ in P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3, η bzw. μ überführt, läßt sich sofort als Spezialfall einer allgemeineren angeben, die in Kapitel 4 der vierten zitierten Arbeit des Verfassers angegeben ist:

$$x = l \int_0^\eta \frac{d\eta}{\tau}\,, \tag{28}$$

$$\lambda = \varkappa\, \mu\,, \tag{29}$$

$$p_i = \bar{C}_i^{-1}\, P_i \qquad (i = 1, 2)\,, \tag{30}$$

$$q_i = \bar{C}_i\, Q_i \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{31}$$

Hierin sind mit der Bezeichnung

$$J = \int_0^l \left(\frac{M}{K_B}\right)^{\frac{1}{4}} dx \tag{32}$$

folgende Abkürzungen benutzt:

$$\varkappa = J^{-4}\,, \tag{33}$$

$$\frac{\tau}{l} = J^{-1} \left(\frac{M}{K_B}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{34}$$

$$\bar{C}_i = J^2\, M^{-\frac{1}{2}} \left[J^{-1} \left(\frac{M}{K_B}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{i-\frac{1}{2}} \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{35}$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$h_1 = \frac{1}{4} \ln (e_1\, K_B\, M)\,, \qquad h_2 = \frac{1}{8} \ln \left(e_2 \frac{M}{K_B}\right), \tag{36}$$

worin e_1 und e_2 positive Konstanten sind, die nur so gewählt werden müssen, daß die obigen Logarithmen dimensionslose Argumente haben, so ergibt die Transformation (28) bis (31) das **Variationsproblem I:**

$$\delta \int_0^1 \Big[P_1\, \dot{Q}_1 + P_2\, \dot{Q}_2 + \frac{1}{2}\, Q_3^2 - P_1\, Q_2 - P_2\, Q_3 - \frac{1}{2}\, \mu Q_1^2 - \dot{h}_1\, (P_1\, Q_1 + P_2\, Q_2) - h_2\, (\dot{P}_1\, Q_1 - P_2\, Q_2)\Big]\, d\eta = 0\,, \tag{37}$$

[1] *N. O. Myklestad*, J. Aeronautical Sciences 11 (1944), S. 153.
[2] *H. Holzer*, Die Berechnung der Drehschwingungen, Berlin 1921.
[3] Herr Professor *K. Lürenbaum* machte mich freundlicherweise darauf aufmerksam, daß *Holzer* diesen Gedanken wiederum von *Gümbel* (Z. VDI 1912, S. 1025 u. 1085) übernommen hat.
[4] *E. Pestel*, Abhandl. Braunschweigischen Wissenschaftl. Gesellschaft 6 (1954), S. 227.
[5] *K. Marguerre*, J. Math. and Phys., 25 (1956), S. 28 (hier weitere Literaturhinweise).
[6] *S. Falk*, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 96 (hier weitere Literaturhinweise).

wobei Punkte Ableitungen nach η bedeuten, mit den Randbedingungen

$$Q_1 = 0 \quad (\eta = 0), \tag{38}$$

$$Q_2 = 0 \quad (\eta = 1). \tag{39}$$

Damit die Lösungen eindeutig werden, fügen wir noch die Normierungsbedingung

$$\int_0^1 Q_1^2 \, d\eta = 1 \tag{40}$$

hinzu. Die nach aufsteigender Größe geordneten Eigenwerte seien mit $\mu = \mu_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ bezeichnet.

b) Das dem Variationsproblem I „benachbarte" Problem II. Der erste Eigenwert μ_1 des Variationsproblems I soll durch den ersten Eigenwert $\bar{\mu}_1$ eines einfacheren Variationsproblems II angenähert werden. Problem II entsteht aus Problem I, wenn man hierin $\dot{h}_1$ durch die Konstante b_1 und $\dot{h}_2$ durch die Konstante b_2 ersetzt. Die Eigenwerte des Problems II seien mit $\bar{\mu}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ bezeichnet. Die zu dem kleinsten Eigenwert $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 (b_1, b_2)$ gehörigen Eigenfunktionen seien $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ und $\bar{Q}_3$.

Um die günstigsten Werte von b_1 und b_2 zu ermitteln, bilden wir zunächst ein Zwischenproblem III, das zwei Parameter ε_1 und ε_2 so linear enthält, daß es für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ in Problem II und für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ in Problem I übergeht:

$$\delta \int_0^1 \Big\{ P_1 \dot{Q}_1 + P_2 \dot{Q}_2 + \frac{1}{2} Q_3^2 - P_1 Q_2 - P_2 Q_3 - \frac{1}{2} \mu Q_1^2 - [b_1 + \varepsilon_1 (\dot{h}_1 - b_1)] (P_1 Q_1 + P_2 Q_2)$$

$$- [b_2 + \varepsilon_2 (\dot{h}_2 - b_2)] (P_1 Q_1 - P_2 Q_2) \Big\} d\eta = 0. \tag{41}$$

Als Randbedingungen gelten (38), (39). Die Normierungsbedingung (40) wird ebenfalls gefordert. Die Eigenwerte dieses Variationsproblems seien mit $\tilde{\mu}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ bezeichnet. Es ist $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1 (\varepsilon_1, \varepsilon_2; b_1, b_2)$, und es gilt $\tilde{\mu}_1 (0, 0; b_1, b_2) = \bar{\mu}_1 (b_1, b_2)$ und $\tilde{\mu}_1 (1, 1; b_1 b_2) = \mu_1$.
In erster Näherung wird $\bar{\mu}_1 \approx \mu_1$ sein, falls man b_1 und b_2 so bestimmt, daß

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_1 (0, 0; b_1, b_2)}{\partial \varepsilon_i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{42}$$

ist.

Um mit Hilfe von (42) die günstigsten Werte b_1^*, b_2^* von b_1, b_2 zu bestimmen, beachten wir, daß für den stationären Wert A_s des unter dem Variationszeichen δ stehenden Integrals in (41)

$$\frac{\partial A_s}{\partial \varepsilon_i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{43}$$

gilt, was in ähnlicher Weise wie in Kapitel 2.3 der vierten oder in Kapitel 4.4 der dritten Arbeit des Verfassers gezeigt werden kann. Dabei sind bei der mit ∂ bezeichneten partiellen Differentiation die Eigenfunktionen $P_1, \ldots, Q_3$ als konstant anzusehen. Aus (43) ergeben sich für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ unter Beachtung von (42) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die „günstigsten Werte" $b_1 = b_1^*$ und $b_2 = b_2^*$ im Variationsproblem II:

$$b_1 = \frac{\int_0^1 \dot{h}_1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 + \bar{P}_2 \bar{Q}_2) \, d\eta}{\int_0^1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 + \bar{P}_2 \bar{Q}_2) \, d\eta}, \tag{44}$$

$$b_2 = \frac{\int_0^1 \dot{h}_2 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 - \bar{P}_2 \bar{Q}_2) \, d\eta}{\int_0^1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 - \bar{P}_2 \bar{Q}_2) \, d\eta}. \tag{45}$$

Weil $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ in (44) und (45) die Eigenfunktionen des Variationsproblems II sind, hängen auch die rechten Seiten von (44) und (45) noch von b_1 und b_2 ab. Bevor wir b_1^* und b_2^* aus diesen beiden Gleichungen bestimmen können, müssen wir die Lösung des Variationsproblems II untersuchen. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen.

c) Untersuchung des Variationsproblems II. Die zu $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 (b_1, b_2)$ gehörenden Eigenfunktionen $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ und $\bar{Q}_3$ des Variationsproblems II, das sich aus (38) bis (41) für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

ergibt, genügen den folgenden *Euler*schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{Q}}_1 - \overline{Q}_2 - (b_1 + b_2)\,\overline{Q}_1 &= 0\,, \\ \dot{\overline{Q}}_2 - \overline{Q}_3 - (b_1 - b_2)\,\overline{Q}_2 &= 0\,, \\ \dot{\overline{P}}_1 + \overline{\mu}_1\,\overline{Q}_1 + (b_1 + b_2)\,\overline{P}_1 &= 0\,, \\ \dot{\overline{P}}_2 + \overline{P}_1 + (b_1 - b_2)\,\overline{P}_2 &= 0\,, \\ \overline{Q}_3 - \overline{P}_2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

und den Randbedingungen

$$\overline{Q}_1 = \overline{P}_2 = 0 \qquad (\eta = 0)\,, \qquad\qquad \overline{Q}_2 = \overline{P}_1 = 0 \qquad (\eta = 1)\,. \tag{47}$$

Eliminieren wir aus (46) und (47) die Größen $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}_2$ und $\overline{Q}_3$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dddot{\overline{Q}}_1 - 2\,(b_1^2 + b_2^2)\,\ddot{\overline{Q}}_1 - [\overline{\mu}_1 - (b_1^2 - b_2^2)^2]\,\overline{Q}_1 = 0 \tag{48}$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \overline{Q}_1 &= 0\,, \\ \ddot{\overline{Q}}_1 - 2\,b_1\,\dot{\overline{Q}}_1 &= 0\,, \end{aligned}\right\} (\eta = 0)\,, \qquad \left.\begin{aligned} \dot{\overline{Q}}_1 - (b_1 + b_2)\,\overline{Q}_1 &= 0\,, \\ \dddot{\overline{Q}}_1 - (b_1 + b_2)\,\ddot{\overline{Q}}_1 &= 0\,, \end{aligned}\right\} (\eta = 1)\,. \tag{49}$$

Der übliche Exponentialansatz für $\overline{Q}_1$ in (46) führt zu der Darstellung

$$\overline{Q}_1 = a \sin \alpha\,\eta + b \cos \alpha\,\eta + c\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\eta + d\,\mathfrak{Cof}\,\beta\,\eta \tag{50}$$

mit zunächst noch unbestimmten Konstanten a, b, c und d sowie

$$\alpha = [(\overline{\mu}_1 + 4\,b_1^2\,b_2^2)^{1/2} - (b_1^2 + b_2^2)]^{1/2} \qquad \text{und} \qquad \beta = [(\overline{\mu}_1 + 4\,b_1^2\,b_2^2)^{1/2} + b_1^2 + b_2^2]^{1/2}\,. \tag{51}$$

Zur Bestimmung von a, b, c und d erhalten wir durch Einsetzen von (50) in (49) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2\,b_1\,\alpha & -\alpha^2 & -2\,b_1\,\beta & \beta^2 \\ [\alpha \cos \alpha & [-\alpha \sin \alpha & [\beta\,\mathfrak{Cof}\,\beta & [\beta\,\mathfrak{Sin}\,\beta \\ -(b_1 + b_2) \sin \alpha] & -(b_1 + b_2) \cos \alpha] & -(b_1 + b_2)\,\mathfrak{Sin}\,\beta] & -(b_1 + b_2)\,\mathfrak{Cof}\,\beta] \\ [-\alpha^3 \cos \alpha & [\alpha^3 \sin \alpha & [\beta^3\,\mathfrak{Cof}\,\beta & [\beta^3\,\mathfrak{Sin}\,\beta \\ +(b_1 + b_2)\,\alpha^2 \sin \alpha] & +(b_1 + b_2)\,\alpha^2 \cos \alpha] & -(b_1 + b_2)\,\beta^2\,\mathfrak{Sin}\,\beta] & -(b_1 + b_2)\,\beta^2\,\mathfrak{Cof}\,\beta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0\,. \tag{52}$$

Die Forderung, daß die Determinante dieses homogenen Gleichungssystems für die Unbekannten a, b, c und d verschwinden muß, führt nach einigen Vereinfachungen zu der Gleichung

$$\begin{aligned} &b_2\,\beta\,(4\,b_1^2 - \alpha^2 - \beta^2) \sin \alpha\,\mathfrak{Cof}\,\beta + (b_2^2 - b_1^2)\,(\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta + \alpha\,\beta\,(\alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha \\ &\quad \mathfrak{Cof}\,\beta - b_2\,\alpha\,(4\,b_1^2 + \alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta = 0\,. \end{aligned} \tag{53}$$

Aus (53) und (51) lassen sich für ein vorgegebenes Wertepaar b_1, b_2 die zugehörigen Werte $\overline{\mu}_1$, α, β und damit unter Beachtung von (52) auch das Verhältnis $a:b:c:d$ bestimmen. Aus (50) und (40), worin Q_1 durch $\overline{Q}_1$ zu ersetzen ist, kann dann $\overline{Q}_1$ berechnet werden. Die übrigen Eigenfunktionen $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2\,\overline{Q}_2$ und $\overline{Q}_3$ ergeben sich mit Hilfe von (46). Den später benötigten Wert $\overline{\mu}_1^{1/4}/(2\,\pi)^{1/2}$ kann man in dem praktisch ausreichenden Bereich $|b_1| \leqq 2$, $-1 \leqq b_2 \leqq 0$ mit 1% Genauigkeit[1] wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{(\overline{\mu}_1)^{1/4}}{(2\,\pi)^{1/2}} &= 0{,}62666 - 0{,}021315\,b_1^2 + 0{,}0003161\,b_1^4 + b_2\,(0{,}006603\,b_1^2 - 0{,}253976) \\ &\quad + b_2^2\,(0{,}001249\,b_1^2 + 0{,}021801)\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Die aus den Integralen

$$\left.\begin{aligned} \overline{J}_1 &= \int_0^1 (\overline{P}_1\,\overline{Q}_1 + \overline{P}_2\,\overline{Q}_2)\,d\eta\,, & \overline{J}_2 &= \int_0^1 (\overline{P}_1\,\overline{Q}_1 - \overline{P}_2\,\overline{Q}_2)\,d\eta\,, \\ \overline{K}_1 &= \int_0^1 \eta\,(\overline{P}_1\,\overline{Q}_1 + \overline{P}_2\,\overline{Q}_2)\,d\eta\,, & \overline{K}_2 &= \int_0^1 \eta\,(\overline{P}_1\,\overline{Q}_1 - \overline{P}_2\,\overline{Q}_2)\,d\eta \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

[1] Die folgende Polynomapproximation (54) hat ebenso wie (84) für kleine Werte von $|b_1|$, $|b_2|$ bzw. $|b_1^*|$, $|b_2^*|$ wesentlich größere Genauigkeit als angegeben ist.

gebildeten später benötigten Quotienten $\bar{K}_1/\bar{J}_1$ und $\bar{K}_2/\bar{J}_2$ erweisen sich im Gebiete $|b_1| \leqq 2$, $-1 \leqq b_2 \leqq 0$ als nahezu konstant. Zwecks Vereinfachung der später herzuleitenden Formeln werden daher diese Größen als konstant betrachtet. Wir setzen

$$C_1 = \frac{\bar{K}_1}{\bar{J}_1} = 0{,}625\,, \qquad C_2 = \frac{\bar{K}_2}{\bar{J}_2} = 0{,}5\,. \tag{56}$$

d) Approximation des ersten Eigenwertes des Variationsproblems I durch den des Problems II. Um nun das Gleichungssystem (44), (45) angenähert nach b_1 und b_2 aufzulösen, setzen wir für $\dot{h}_1$ und $\dot{h}_2$ folgende abgebrochene *Taylor*reihen mit noch unbestimmten Größen c_1 und c_2 an:

$$\left.\begin{aligned} \dot{h}_1(\eta) &= \dot{h}_1(c_1) + \ddot{h}_1(c_1)\,(\eta - c_1)\,, \qquad 0 \leqq c_1 \leqq 1\,, \\ \dot{h}_2(\eta) &= \dot{h}_2(c_2) + \ddot{h}_2(c_2)\,(\eta - c_2)\,, \qquad 0 \leqq c_2 \leqq 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Durch Einsetzen von (57) in (44) und (45) erhalten wir unter Beachtung von (55) und (56)

$$b_1 = \dot{h}_1(c_1) + \ddot{h}_1(c_1)\,(C_1 - c_1)\,, \tag{58}$$

$$b_2 = \dot{h}_2(c_2) + \ddot{h}_2(c_2)\,(C_2 - c_2)\,. \tag{59}$$

Wir setzen nun $c_1 = C_1$ und $c_2 = C_2$ gemäß (56) und ersetzen außerdem die ersten Differentialquotienten durch Differenzenquotienten gemäß der Formel

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2\,\Delta x}\quad (f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) + \cdots\,. \tag{60}$$

Darin beginnt das fortgelassene Glied erst mit der dritten Ableitung, die auch in (57) nicht berücksichtigt ist. Wählen wir in $\dot{h}_1(\eta)$ als Schrittlänge im Sinne von (60) die Größe $\Delta\eta_1 = 1 - C_1$ und in $\dot{h}_2(\eta)$ die Größe $\Delta\eta_2 = 1 - C_2$, so erhalten wir, wenn wir noch (56) beachten, die Näherungsformeln

$$b_1^* \approx \frac{h_1(1) - h_1(2\,C_1 - 1)}{2\,(1 - C_1)} = \frac{h_1(1) - h_1(0{,}25)}{0{,}75}\,, \tag{61}$$

$$b_2^* \approx \frac{h_2(1) - h_2(2\,C_2 - 1)}{2\,(1 - C_2)} = h_2(1) - h_2(0)\,. \tag{62}$$

Berechnen wir zu diesen Werten $b_1 = b_1^*$ und $b_2 = b_2^*$ mit Hilfe von (54) den ersten Eigenwert $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1^*$ des zugehörigen Variationsproblems II, so gilt nach Abschnitt b)

$$\mu_1 \approx \bar{\mu}_1^*\,. \tag{63}$$

Für die rechnerische Auswertung von (61) ist es noch günstig zu wissen, welches $\xi = (x/l)$-Argument $\xi = \xi_B$ zu dem η-Argument $\eta = 0{,}25$ gehört. Da wegen (28) die Beziehung $d\xi = dx/l = d\eta/\tau$ gilt, so wird wegen (34)

$$\eta = \frac{l}{J} \int_0^{\xi} \left(\frac{M}{K_B}\right)^{1/4} d\xi\,. \tag{64}$$

Bezeichnen wir den zu $\xi = 0{,}25$ gehörigen η-Wert mit η_1, so wird

$$\eta_1 = \frac{l}{J} \int_0^{0{,}25} \left(\frac{M}{K_B}\right)^{1/4} d\xi\,. \tag{65}$$

Werten wir hierin das Integral nach der Trapezformel aus und J nach der *Simpson*schen Regel so wird mit den Bezeichnungen (1), (2), (3), (4)

$$\frac{J}{l} \approx B \left(\frac{M_M}{K_{BM}}\right)^{1/4} \tag{66}$$

und damit weiter

$$\eta_1 = \frac{1}{B}\left(\frac{B_0 + B_1}{2}\right) \cdot 0{,}25\,. \tag{67}$$

Interpolieren wir η als Funktion von ξ linear in dem Intervall $0 \leqq \xi \leqq 0{,}25$, so erhalten wir

$$\eta \approx \frac{1}{B}\left(\frac{B_0 + B_1}{2}\right)\xi\,. \tag{68}$$

Hieraus errechnet sich der zu $\eta = 0{,}25$ gehörige Wert $\xi = \xi_B$, wie er in (5) angegeben ist. Diese unter der Voraussetzung $0 \leqq \xi_B \leqq 0{,}25$ hergeleitete Beziehung wird auch noch gelten, falls ξ_B etwas größer als 0,25 wird.

Nun nehmen wir noch einige Umformungen vor, um auf die in Abschnitt 2 angegebene Form für die Berechnung der Grundbiegeeigenfrequenz zu kommen. Dazu setzen wir in (36)

$$e_1 = (K_{BM}\, M_M)^{-1}, \qquad e_2 = M_M^{-1}\, K_{BM} \tag{69}$$

und führen die Bezeichnungen

$$(3\, b_1^*\, \lg e)^2 = L_p, \tag{70}$$

$$8\, b_2^*\, \lg e \;\; = L_q \tag{71}$$

ein. Damit geht (61) nach Quadrieren in (6) über und (62) in (7), wenn wir (36), (69), (1) und (2) beachten und außerdem uns erinnern, daß $\eta = 0{,}25$ dem ξ-Wert $\xi = \xi_B$ nach (5) entspricht. Bezeichnen wir die zu $b_1 = b_1^*$, $b_2 = b_2^*$ gehörigen Eigenwerte des Variationsproblems II mit $\bar{\mu}_k^*$ und setzen zur Abkürzung

$$\frac{(\bar{\mu}_k^*)^{1/4}}{(2\,\pi)^{1/2}} = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{72}$$

so erhalten wir für $k = 1$ bei Beachtung von (54), (70) und (71)

$$\begin{aligned}\alpha_1 = {} & 0{,}62666 - 0{,}012556\, L_p + 0{,}0001097\, L_p^2 + L_q\,(-0{,}073100 + 0{,}0011195\, L_p) \\ & + L_q^2\,(0{,}001806 + 0{,}0000610\, L_p)\;(\pm\, 1\%)\,.\end{aligned} \tag{73}$$

Tabulieren wir noch den von L_q unabhängigen Teil

$$F_1(L_p) = 0{,}62666 - 0{,}012556\, L_p + 0{,}0001097\, L_p^2, \tag{74}$$

so kommen wir zu der in (9) angegebenen Darstellung von α_1. Aus (29), worin λ durch λ_k und μ durch μ_k zu ersetzen sind, sowie (20) erhalten wir

$$(2\,\pi f_{B,\,2k-1,\,ex})^2 = \lambda_k = \varkappa\, \mu_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{75}$$

Daraus folgt für $k = 1$ wegen (63) und (72)

$$f_{B\,1,\,ex} \approx \sqrt{\varkappa}\;\cdot \frac{\sqrt{\mu_1^*}}{2\,\pi} = \sqrt{\varkappa}\;\alpha_1^2. \tag{76}$$

Bezeichnen wir den erhaltenen Näherungswert für $f_{B\,1,\,ex}$ mit $f_{B\,1}$, so erhalten wir schließlich unter Berücksichtigung von (33), (66) und (13) die Gleichung (14) für $n = 1$, womit die Gültigkeit dieser Formel für die Berechnung der Grundbiegeeigenfrequenz gezeigt ist.

5. Herleitung der Näherungsformel (14) für die Oberbiegeeigenfrequenz f_{Bn} ungerader Ordnungszahl n. Die aus den *Euler*schen Gleichungen des Variationsproblems I nach (37) bis (40) herleitbare Differentialgleichung für Q_1 hat — wie man leicht zeigt — dieselben Faktoren bei $\dddot{Q}_1$ und $\mu\, Q_1$ wie die entsprechende Gleichung (48) für das Variationsproblem II bei $\ddot{\bar{Q}}_1$ und $\bar{\mu}_1\, \bar{Q}_1$. Nach *Lehmann*[1] verhalten sich daher die zu den Problemen I und II gehörigen Eigenwerte μ_k bzw. $\bar{\mu}_k$ für $k \to \infty$ in erster Näherung asymptotisch gleich, und zwar unabhängig davon, welche Werte die Größen b_1 und b_2 in dem Variationsproblem II haben.

Setzen wir nun in Variationsproblem II die Größen b_1 und b_2 gleich b_1^* bzw. b_2^* und bezeichnen die zugehörigen Werte mit $\bar{\mu}_k^*$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, so liegt es wegen des genannten asymptotischen Verhaltens nahe, die Beziehung (63) in folgender Weise zu erweitern:

$$\mu_k \approx \bar{\mu}_k^* \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{77}$$

Diese Beziehung wird dann sowohl für $k = 1$ als auch für $k \to \infty$ recht gute Näherungswerte für die Eigenwerte μ_k des Variationsproblems I liefern. Wegen der Einfachheit von (77) wollen wir diese Beziehung zur näherungsweisen Berechnung von μ_k für alle k benutzen und dabei in Kauf nehmen, daß diese Beziehung für kleinere Werte $k > 1$ möglicherweise nur grobe Näherungswerte für μ_k liefert. Zur Berechnung von $\bar{\mu}_k^*$ für $k > 1$ soll die folgende, aus (51) und (53) herleitbare asymptotische Beziehung (mit $2\,k - 1 = n$)

$$\alpha_n^2 = \frac{(\bar{\mu}_k^*)^{1/2}}{2\,\pi} = \frac{\pi}{8}\, n^2 + \frac{b_1^2}{2\,\pi}\left(1 - \frac{4}{n\,\pi}\right) + \frac{b_2^2 - 2\,b_2}{2\,\pi} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{78}$$

benutzt werden, in der dann $b_1 = b_1^*$ und $b_2 = b_2^*$ zu setzen sind.

Ebenso wie aus (63) die Beziehung (14) für $n = 1$ hergeleitet wurde, läßt sich aus (77) die Beziehung (14) für $n = 2\,k - 1$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ herleiten. Dabei geht (78) mit Hilfe von (70) und (71) in (11) über. Damit ist die Formel (14) für alle ungeraden $n \geqq 1$ hergeleitet.

[1] *N. J. Lehmann*, Wissenschaftl. Z. Techn. Hochsch. Dresden 2 (1952/53), Heft 3.

6. Herleitung der Formel (14) für die Oberbiegeeigenfrequenzen f_{Bn} gerader Ordnungszahl n. Die Eigenschwingungsformen, die zu den Eigenfrequenzen $f_{Bn,ex}$ mit geradem n gehören, sind zur Balkenmitte antimetrisch. Daher sind sowohl das Biegungsmoment als auch die Durchbiegung in Balkenmitte, d. h. für $x = l$, gleich Null, und der bei $x = l$ durchgeschnittene und bei $x = 0$ und $x = l$ gelenkig gelagerte Balken hat Eigenfrequenzen $\hat{f}_{Br,ex}$ für die

$$\hat{f}_{Br,ex} = f_{B,2r,ex} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots) \tag{79}$$

gilt. Es bleibt also die Aufgabe, Näherungswerte $\hat{f}_{Br}$ für die Eigenfrequenzen $\hat{f}_{Br,ex}$ eines bei $x = 0$ und $x = l$ gelenkig gelagerten Balkens zu bestimmen, der in $0 \leqq x \leqq l$ dieselben Querschnittsgrößen hat, wie der von uns bisher betrachtete Balken. Die die antimetrische Schwingungsform darstellende Funktion $w = w(x)$ genügt für $0 \leqq x \leqq l$ natürlich auch der Variationsbedingung (17) sowie der Randbedingung (18). Die Bedingung (19) ist jedoch durch

$$w = 0 \qquad (x = l) \tag{80}$$

zu ersetzen. Durch dieselben Transformationen wie in Abschnitt 4 a) kann dies Variationsproblem auf die Form (37) gebracht werden. Als Randbedingung ist außer (38) die Bedingung

$$Q_1 = 0 \qquad (\eta = 1) \tag{81}$$

hinzuzufügen.

Um nun zu einfachen Näherungsformeln für die Eigenwerte dieses Problems zu kommen, setzen wir in diesem Variationsproblem

$$\dot{h}_1 = b_1^* , \qquad \dot{h}_2 = b_2^* , \tag{82}$$

wo b_1^* und b_2^* die Konstanten sind, die sich als Lösung von (44), (45) ergaben. Die Eigenwerte $\hat{\mu}_r^*$ dieses vereinfachten Problems ergeben sich aus den folgenden Gleichungen, die in ähnlicher Weise hergeleitet sind, wie die Gleichungen (51) und (53):

$$\left.\begin{aligned} &8\, b_1^{*2}\, \alpha\, \beta - [4\, b_1^{*2}\, (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2] \sin \alpha \operatorname{Sin} \beta - 8\, b_1^{*2}\, \alpha\, \beta \cos \alpha \operatorname{Cof} \beta = 0 , \\ &\beta^2 - \alpha^2 = 2\, (b_1^{*2} + b_2^{*2}) , \\ &\hat{\mu}_r^* = \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\, b_1^{*2}\, b_2^{*2} . \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen können im Intervall

$$|b_1^*| \leqq 2 , \qquad -1 \leqq b_2^* \leqq 0$$

wie folgt approximiert werden:

$$\alpha_2 = \frac{(\hat{\mu}_1)^{1/4}}{(2\,\pi)^{1/2}} = 1{,}25331 - 0{,}024651\, b_1^{*2} + 0{,}0001695\, b_1^{*4} + (0{,}063674 - 0{,}000370\, b_1^{*2})\, b_2^{*2} \quad (\pm\, 0{,}15\,\%) \tag{84}$$

und mit $2\,r = n \quad (r = 2, 3, 4, \ldots)$

$$\alpha_n^2 = \frac{(\hat{\mu}_r)^{1/2}}{2\,\pi} = \frac{\pi}{8}\, n^2 + \frac{b_1^{*2}}{2\,\pi}\left(1 - \frac{8}{n\,\pi}\right) + \frac{b_2^{*2}}{2\,\pi} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{85}$$

Die Eigenfrequenzen $\hat{f}_{Br}$ des durch (82) vereinfachten Systems berechnen sich damit, wie man ähnlich wie in den Abschnitten 4d) und 5 schließt, zu

$$\hat{f}_{Br} = \frac{\alpha_n^2}{B^2}\, \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{K_M}{M_M}} \qquad \left(\frac{n}{2} = r = 1, 2, 3, \ldots\right) \tag{86}$$

Setzt man nun

$$\hat{f}_{Br,ex} \approx \hat{f}_{Br} , \tag{87}$$

so gilt (87) exakt, wenn (82) exakt erfüllt ist. Allgemein gilt (87) wenigstens in erster Näherung symptotisch. Um zu einer einfachen Formel zu kommen, wollen wir (87) als unsere Näherungsformel ansehen. Führen wir in (84) und (85) noch die Transformation (70) und (71) ein, so erhalten wir (10) bzw. (12). Damit haben wir, wenn wir noch (79), (86) und (87) zusammenfassen, die Gleichung (14) auch für gerade $n > 0$ hergeleitet.

7. Balken, für die die Näherungsformel (14) exakte Werte ergibt. Zur Herleitung der Näherungsformel (14) dieser Arbeit wurde die Gleichung (37) durchweg durch die Annahme (82) vereinfacht. Bis auf die geringen Fehler, die durch die Polynomapproximationen der α_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) mittels der Gleichungen (9) bis (12) entstehen, liefert (14) also exakte Werte, wenn (82) für den Balken exakt erfüllt ist.

Die Massen- und die Steifigkeitsverteilung eines derartigen Balkens erhält man durch Integration von (82), wenn man noch (36), (28) und (34) beachtet. Läßt man noch den Stern bei den nunmehr beliebigen Konstanten b_1 und b_2 fort, so ergeben sich die Querschnittsgrößen M und K_B der Balken, deren Eigenfrequenzen durch (14) (nahezu) exakt geliefert werden, wie folgt:

a) Falls $b_2 \neq 0$ ist,

$$K_B = K_{BM}\, e^{4b_1 - 2b_1}\left[1-(1-e^{-2b_2})\,\xi\right]^{2-\frac{b_1}{b_2}}, \quad M = M_M\, e^{-4b_2-2b_1}\left[1-(1-e^{-2b_2})\,\xi\right]^{-2-\frac{b_1}{b_2}} \tag{88}$$

und

b) falls $b_2 = 0$ ist,

$$K_B = K_{BM}\, e^{-2b_1(1-\xi)}\,, M = M_M\, e^{-2b_1(1-\xi)}\,. \tag{89}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß alle diese Massen- und Steifigkeitsverteilungen einen monotonen Verlauf haben. — Die Berechnung der Eigenfrequenzen für die Balken mit den Querschnittswerten nach (88) oder (89) mit Hilfe von (14) kann noch dadurch vereinfacht werden, daß man die benötigten α_n-Werte nicht aus (9) bis (12) berechnet, sondern aus den Gleichungen (54) und (78) sowie aus (84) und (85), wo in den beiden letzten noch b_1^* und b_2^* durch b_1 bzw. b_2 zu ersetzen sind.

8. Bemerkung über Balken mit unsymmetrischem Querschnittsverlauf. Bei Balken mit unsymmetrischem Querschnittsverlauf kann man zunächst ganz ähnlich vorgehen wie in Abschnitt 4 bei dem symmetrischen Balken. Dies wurde bereits in Abschnitt 6 angedeutet. Bei der Wahl der Parameter b_1 und b_2 wurde jedoch eine Schwierigkeit bewußt umgangen: Diese Parameter wurden in Abschnitt 6 einfach gleich den für den symmetrischen Fall berechneten Werten b_1^* bzw. b_2^* gesetzt. Das waren jedoch keineswegs optimale Werte für den unsymmetrischen Fall in dem Sinne, wie es b_1^* und b_2^* für den symmetrischen Fall waren. Eine in diesem Sinne optimale Wahl ist im unsymmetrischen Falle leider nicht möglich, da die Größen, die C_1 und C_2 nach (56) entsprechen würden, für den unsymmetrischen Balken auch nicht annähernd konstant sind. Für den unsymmetrischen Balken ist offenbar eine Vereinfachung des Variationsproblems in der Art (82) zu einschneidend; eine Approximation der gegebenen Differentialgleichung durch eine solche mit nicht oder nur teilweise konstanten Koeffizienten wäre wünschenswert gewesen. Eine solche Approximation wurde jedoch wegen des zu erwartenden Arbeitsaufwandes nicht in Angriff genommen.

Bei dem symmetrischen Balken konnten wir diese Schwierigkeit dadurch umgehen, daß wir nur eine Hälfte betrachteten. Dadurch bekam Q_1 an dem einen Ende des betrachteten Balkenteils seinen Kleinstwert und an dem anderen Ende seinen Größtwert. Diese Eigenschaft von Q_1 muß vermutlich zumindest angenähert vorhanden sein, damit unser hier benutztes allgemeines Verfahren zur Herleitung von Näherungsformeln mit Erfolg angewandt werden kann. Das zeigt jedenfalls die Erfahrung sowohl in der vorliegenden Arbeit als auch bei den Herleitungen von Näherungsformeln in den vier früheren Arbeiten des Verfassers. Der Grund ist kurz gesagt folgender: Umfaßt die durch Q_1 dargestellte Schwingungsform mehr als „eine Viertelperiode einer sinusförmigen Schwingung", so treten in den „Gewichtsfunktionen" bei $\dot{h}_1$ und $\dot{h}_2$ in (44) bzw. (45) Vorzeichenwechsel auf, die die Auflösung dieser Gleichungen nach b_1 und b_2 erschweren oder gar unmöglich machen.

9. Schluß. Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Herleitung einer Näherungsformel für die Biegeeigenfrequenzen eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Balkens, dessen Querschnittsgrößen zur Mitte zwischen den Auflagern symmetrisch sind, zeigte in einem weiteren Beispiele die Brauchbarkeit eines früher vom Verfasser entwickelten allgemeinen Verfahrens[1] zur Aufstellung von Näherungsformeln für die Eigenwerte selbstadjungierter Differentialgleichungen. Eine Fehlerabschätzung, wie etwa für die Näherungsformel für Torsionseigenfrequenzen[2], wurde für die hergeleitete Formel nicht gegeben. Ihre Brauchbarkeit konnte jedoch an Beispielen gezeigt werden.

Bemerkenswert ist, daß die erwähnte allgemeine Methode nicht ohne weiteres auf den nicht zur Mitte symmetrischen Balken angewandt werden kann. Aus diesem Grunde konnten in dieser Arbeit für die Biegeeigenfrequenzen $f_{Bn,ex}$ gerader Ordnung n nicht so genaue Näherungsformeln angegeben werden wie für die Frequenzen ungerader Ordnung.

(Eingegangen am 14. Juni 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *H. Wittmeyer*, Linköping (Schweden), Valkebogatan 14 A

[1] Siehe Fußnote 4 von Seite 117.
[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 117.

Weiterführung der *Sobrero*schen Theorie des ebenen Spannungszustandes*

Von W. Engl

1. Einführung in die Behandlung des ebenen Spannungszustandes mittels hyperkomplexer Funktionen. Wir stellen zunächst kurz die Ergebnisse der für den zu behandelnden Gegenstand grundlegenden Arbeit von *L. Sobrero*[1] zusammen. Wenn man Lösungen $f(x, y)$ der Gleichung

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sucht und den Ansatz $f(x, y) = f(x + i y)$ macht, so findet man, daß die Konstante i der Gleichung $1 + i^2 = 0$ genügen muß. Man stellt fest, daß für analytische Funktionen gilt $f(x + i y) = u(x, y) + i v(x, y)$ mit $\Delta u = \Delta v = 0$.

Sucht man die Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta f \equiv \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

ebenfalls mit einer Funktion $f(x, y)$ der linearen Kombination $z = x + j y$ zu befriedigen:

$$f(x, y) = f(x + j y), \tag{2}$$

so findet man, daß die Konstante j der Gleichung

$$1 + 2 j^2 + j^4 = 0 \tag{3}$$

genügen muß. Für analytische Funktionen erhält man

$$f(x + j y) = a(x, y) + j\, b(x, y) + j^2 c(x, y) + j^3 d(x, y) \tag{4}$$

mit

$$\Delta\Delta a = \Delta\Delta b = \Delta\Delta c = \Delta\Delta d = 0. \tag{5}$$

Die den *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen entsprechenden Regularitätsbedingungen lauten:

$$a_y = -d_x, \qquad b_y = a_x, \qquad c_y = b_x - 2 d_x, \qquad d_y = c_x. \tag{6}$$

Weiter läßt sich der *Cauchy*sche Integralsatz beweisen: Ist $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet überall regulär, so gilt:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0. \tag{7}$$

Aus diesem Fundamentalsatz folgt wie in der Funktionentheorie die *Cauchy*sche Integralformel und die Entwickelbarkeit einer in einem Kreisringgebiet definierten Funktion in eine *Laurent*sche Reihe. Vergleicht man die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes bei Vernachlässigung der Massenkräfte

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

mit den *Cauchy*schen Bedingungen (6) für die Funktion

$$f(z) = a + j\, b + j^2 c + j^3 d,$$

so sieht man, daß die beiden Gleichungen, welche b nicht enthalten, mit den Gleichgewichtsbedingungen identisch sind, wenn man nur σ_x für $-c$, σ_y für a und τ für d schreibt.

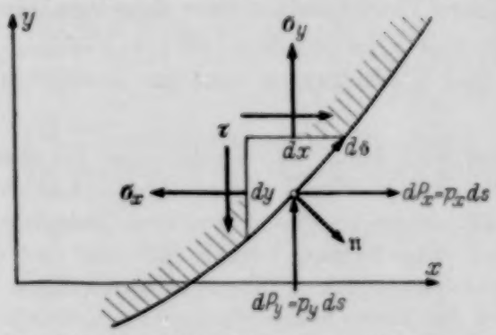


Abb. 1. Gleichgewicht an einem Element des Randes.

Die Elemente a, c und d erfüllen also die Gleichgewichtsbedingungen und sind außerdem Bipotentialfunktionen. Diese beiden Bedingungen sind gerade notwendig und hinreichend, um die Elemente a, c und d als Spannungskomponenten zu charakterisieren.

Besonders wichtig ist noch die physikalische Bedeutung des Integrals. Bezeichnen wir mit dP_x und dP_y die Komponenten der äußeren Kraft, die längs des Randstückes $d\mathfrak{d}$ angreift, so gilt

$$d\mathfrak{d} = dx + j\, dy, \qquad -dP_x = \tau\, dx - \sigma_x\, dy, \qquad -dP_y = \sigma_y\, dx - \tau\, dy. \tag{9}$$

* Auszug aus der gleichnamigen Dissertation des Verfassers, München 1953. Erster Berichterstatter Prof. Dr. *G. Hettner*, zweiter Berichterstatter Prof. Dr. *L. Föppl*.

[1] *L. Sobrero*, Theorie der ebenen Elastizität, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Heft 17, Leipzig 1934.

Wenn man andererseits mit $f(z)$ die hyperkomplexe Funktion bezeichnet, welche die elastische Beanspruchung des Punktes z darstellt und $dz = dx + j\,dy$ das entsprechende hyperkomplexe Differential nennt, so hat man

$$f(z)\,dz = (\sigma_y + j\,b - j^2\,\sigma_x + j^3\,\tau)\,(dx + j\,dy) = (\sigma_y\,dx - \tau\,dy) + \cdots + j^3\,(\tau\,dx - \sigma_x\,dy)$$
$$= -\,dP_y + \cdots + j^3\,(-\,dP_x)\,, \qquad (10)$$

wobei die Punkte einige Glieder ersetzen, die für unsere Betrachtungen nicht von Interesse sind, da sie die Größe b enthalten, der keine physikalische Bedeutung zukommt. Geht man von infinitesimalen zu den endlichen Größen über, so sieht man hieraus: Das erste und das letzte Element des Integrals $\int_A^B f(z)\,dz$ stellen die Komponenten $-P_y$ und $-P_x$ der äußeren Kraft dar. Wenn die Integrationskurve geschlossen ist und in das von ihr berandete Gebiet keine Singularität der Funktion $f(z)$ fällt, so ist das Integral gleich Null. Andererseits ist schon jetzt einzusehen, daß Singularitäten für die Funktion $f(z)$ nur dort existieren können, wo Angriffspunkte der äußeren Kräfte liegen. Man kann also schließen, daß der Satz von *Cauchy* folgendem physikalischen Sachverhalt entspricht: Wenn in irgendwelchem Bereiche eines ebenen Systems keine äußere Kraft angreift, so stehen die am Rande dieses Bereiches angreifenden Spannungen im Gleichgewicht. Ist die Integrationskurve geschlossen und fällt in das von ihr umschlossene Gebiet ein Angriffspunkt einer äußeren Kraft (und deshalb eine Singularität für die Funktion $f(z)$), so verschwindet das Integral $\int_A^B f(z)\,dz$ nicht mehr, und seine äußersten Elemente stellen eben die Komponenten $-P_y$ und $-P_x$ der angreifenden Kraft dar. Damit ist der Residuumbegriff physikalisch gedeutet. Auch das Integral

$$M(z_0) = -\int_A^B (z - z_0)\,f(z)\,dz = \int_A^B [(x - x_0)\,dP_y - (y - y_0)\,dP_x] + j\ldots \qquad (11)$$

hat eine wichtige physikalische Bedeutung: $z_0 = x_0 + j\,y_0$ ist hier ein beliebiger Punkt des ebenen Systems. Es ist nämlich das erste Element des Integrals $M(z_0)$ gleich dem Moment der Spannungen bezüglich des Punktes z_0.

2. Die hyperkomplexe Spannungsfunktion. *Sobrero* beschränkt sich in seiner Arbeit auf diejenigen Spannungszustände, bei denen der Rand lastfrei ist. Die Belastungen greifen also stets im Innern der Bereiche an. In den Anwendungen ist jedoch der Fall, daß die Ränder belastet sind, der häufigere. Allerdings tritt hierbei eine für unseren Problemkreis charakteristische Schwierigkeit auf. Betrachten wir zum Beispiel die Normalspannungen längs eines Randes, der an einem Punkt durch eine Einzelkraft belastet ist, so sind diese überall Null, wenn die Kraft die Richtung der Normalen hat, ausgenommen an ihrem Angriffspunkt, wo sie unendlich werden. Soll nun die Funktion $f(z)$ diesen Spannungszustand beschreiben, so muß sie auf dem Rand ihres Regularitätsgebietes unstetig sein. Der *Cauchy*sche Integralsatz besagt nun, daß $\int_a^b f(z)\,dz$ unabhängig von dem die beiden Punkte verbindenden Integrationsweg C ist, wenn C ganz im Regularitätsgebiet von $f(z)$ liegt, aber auch dann noch, wenn C mit dem Rand des Gebietes zusammenfällt, vorausgesetzt, daß $f(z)$ auf dem Rand stetig ist. In dem genannten Beispiel der Einzelkraft wird die Gültigkeit dieses Satzes auf dem Rande durchbrochen. Hierin liegt die mathematische Wurzel für die Einführung der Spannungsfunktion $\Phi(z)$, welche die Unstetigkeit am Rande hebt.

Wir beweisen den folgenden Satz: Das erste Element einer hyperkomplexen Funktion $\Phi(z)$ stellt die *Airy*sche Funktion $F(x, y)$ eines ebenen Spannungszustandes dar. Die Spannungen erhält man durch die zweite Ableitung der Funktion $\Phi(z)$. Denn es ist

$$\Phi(z) = F + j\,b + j^2\,c + j^3\,d$$

und also

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = F_{xx} + j\,b_{xx} + j^2\,c_{xx} + j^3\,d_{xx}\,.$$

Es gelten nun die Regularitätsbedingungen

danach ist $\quad c_x = d_y\,, \quad c_y = b_x - 2\,d_x\,, \quad F_x = b_y\,, \quad F_y = -\,d_x\,;$

Wir erhalten damit $\quad c_{xx} = d_{yx} = d_{xy} = -\,F_{yy}\,, \quad d_{xx} = -\,F_{yx}\,.$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = F_{xx} + j\,b_{xx} - j^2\,F_{yy} - j^3\,F_{xy} = \sigma_y + j\,b_{xx} - j^2\,\sigma_x + j^3\,\tau$$

zufolge der bekannten Beziehung für die *Airy*sche Funktion

$$\sigma_x = F_{yy}\,, \quad \sigma_y = F_{xx}\,, \quad \tau = -\,F_{xy}\,.$$

Wir fassen kurz zusammen: $$\Phi(z) = F(x;y) + j \dots, \tag{12}$$

$$(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \sigma_y + j \cdots - j^3 \sigma_x + j^3 \tau . \tag{13}$$

Wir benützen im Folgenden das Symbol (σ) für die Gesamtheit der Spannungskomponenten und nennen den Ausdruck „hyperkomplexe Spannung". Man beachte auch die Analogie mit der komplexen Behandlung ebener Potentialströmungen, wo der Realteil des komplexen Potentials das Strömungspotential angibt. Die erste Ableitung liefert dort die konjugierte Geschwindigkeit. Bei uns tritt an Stelle der ersten Ableitung die zweite, da die Differentialgleichung von vierter Ordnung ist.

Es müssen noch die Randbedingungen für die Funktion Φ aufgestellt werden. Dabei knüpfen wir an Gleichung (9) und (10) an:

$$(\sigma)\, dz = d\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = -\, dP_y + j \cdots - j^3\, dP_x = -\, p_y\, ds + j \cdots - j^3\, p_x\, ds ,$$

wenn $p_x(s)$ und $p_y(s)$ die Lastdichte als Funktion der Bogenlänge der Randkurve (C) angeben:

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{Rand} = -\int_{0\,(C)}^{s} p_y(s)\, ds - C_2 + j \cdots - j^3 \left(\int_{0\,(C)}^{s} p_x(s)\, ds + C_1 \right). \tag{14}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$P_x = \int_{0\,(C)}^{s} p_x(s)\, ds + C_1 , \qquad P_y = \int_{0\,(C)}^{s} p_y(s)\, ds + C_2 , \tag{15}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{Rand} = -\, P_y + j \cdots - j^3\, P_x . \tag{16}$$

Der Zusammenhang zwischen (16) und der *Airy*schen Funktion ist leicht herzustellen:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} + j \cdots - j^3 \frac{\partial F}{\partial y} , \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{Rand} = -\, P_y , \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{Rand} = P_x . \tag{18}$$

Wir können nun die beiden Komponenten P_x und P_y in (16) noch zu einem vom Koordinatensystem unabhängigen Ausdruck vereinigen:

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{Rand} [\cos(n\,x) + j \cos(n\,y)] = (\mathfrak{P} \times \mathfrak{n})_{\perp} + j \cdots = -\, P_y \cos(n\,x) + P_x \cos(n\,y) + j \cdots$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{Rand} + j \dots . \tag{19}$$

Dabei haben wir die Größen P_x und P_y zu dem Vektor $\mathfrak{P}$ zusammengefaßt. Das Zeichen $\perp$ bedeutet, daß die bezeichnete Vektorkomponente zu einer Koordinatenachse gehört, die senkrecht auf der (x, y)-Ebene steht. Um die Vektorschreibweise zu legitimieren, werden wir später den Nachweis für den Vektorcharakter der Größen P_x und P_y führen. Schließlich errechnet sich der Wert von Φ auf dem Rande zu

$$d\Phi_{Rand} = (-\, P_y + j \cdots - j^3\, P_x)\, dz_{Rand} = P_x\, dy - P_y\, dx + j \cdots = dF + j \dots .$$

Die Punkte deuten die restlichen Elemente an, in denen P_x und P_y zufolge der Produktbildung mit Gliedern gekoppelt sind, denen eine unmittelbare physikalische Bedeutung nicht zukommt. Diese Elemente werden bis auf unwesentliche Konstante durch reine Quadraturen aus den Regularitätsbedingungen erhalten.

Die Formel $$\Phi_{Rand} = \int_{(C)} (P_x\, d_y - P_y\, d_x) + C_3 + j \dots , \tag{20}$$

kann ebenfalls in eine vom Koordinatensystem unabhängige Form gebracht werden:

$$\Phi_{Rand} = \int_{(C)} (\mathfrak{P}\, \mathfrak{n})\, ds + C_3 + j \cdots = F_{Rand} + j \dots . \tag{21}$$

Der erwähnte Nachweis des Vektorcharakters von $\mathfrak{P}$ knüpft an Gleichung (9) an

$$\left.\begin{aligned} dP_x &= p_x\, ds = \sigma_x\, dy - \tau\, dx = [\sigma_x \cos(n\,x) + \tau \cos(n\,y)]\, ds , \\ dP_y &= p_y\, ds = \tau\, dy - \sigma_y\, dx = [\tau \cos(n\,x) + \sigma_y \cos(n\,y)]\, ds , \\ p_x &= \sigma_x \cos(n\,x) + \tau \cos(n\,y) , \\ p_y &= \tau \cos(n\,x) + \sigma_y \cos(n\,y) . \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die rechten Seiten der Gleichung (22) zeigen Vektorcharakter, sie stellen die Multiplikation des Spannungstensors σ mit dem Einheitsvektor der Normalen dar. Damit ist die Schreibweise der Gleichung (19) und (21) gerechtfertigt.

Zu den in den Randbedingungen auftretenden Konstanten sei noch bemerkt, daß sie bei einfach zusammenhängendem Rand Null gesetzt werden können. Der analytische Charakter der

*Airy*schen Spannungsfunktion wird sehr schön aus der Tatsache sichtbar, daß die ihr zugeordnete hyperkomplexe Spannungsfunktion im gesamten Bereich (Gebiet und Rand) regulär ist.

3. Die Zerlegungsformel für hyperkomplexe Funktionen. Jede hyperkomplexe Zahl

$$z = x + j\,y + j^2\,u + j^3\,v$$

läßt sich in die Form bringen

$$z = \alpha + \omega\,\beta\,, \tag{23}$$

wo α und β gewöhnliche komplexe Zahlen bedeuten. Diese Darstellung verdankt man *Levi-Civita*. Dabei wollen wir von der Bedeutung der komplexen Einheit als Richtgröße in der *Gauß*schen Zahlenebene absehen und nichts weiter darunter verstehen, als die Wurzeln aus -1. In der Tat rechnet man leicht nach, daß

$$\sqrt{-1} = i = \frac{3\,j + j^3}{2}$$

ist, also

$$i^2 = \left(\frac{3\,j + j^3}{2}\right)^2 = \frac{9\,j^2 + 6\,j^4 + j^6}{4} = \frac{9\,j^2 - 6 - 12\,j^2 - j^2 + 2 + 4\,j^2}{4} = -1\,.$$

Die Größe $1 + j^2$ definiert man als hyperkomplexe Nebeneinheit:

$$1 + j^2 = \omega\,. \tag{24}$$

Zufolge der hyperkomplexen Grundrelation verschwindet deren Quadrat

$$\omega^2 = (1 + j^2)^2 = 1 + 2\,j^2 + j^4 = 0\,. \tag{25}$$

Den Beweis für die Möglichkeit der Darstellung $z = \alpha + \omega\beta$, den man durch Ausrechnen und Koeffizientenvergleich leicht führt, zeigen wir nur für den wichtigsten Fall der speziellen Zahl $z = x + j\,y$:

$$z = \alpha + \omega\,\beta = (x + i\,y) + \omega\left(-\frac{i\,y}{2}\right) = x + \frac{3\,j + j^3}{2}\,y - \frac{3\,j + j^3}{2}\,,$$

$$(1 + j^2)\,\frac{y}{2} = x + \frac{3}{2}\,j\,y - (j + j^3)\,\frac{y}{2} + \frac{j^3}{2}\,y = x + j\,y\,.$$

Augenscheinlich bezweckt diese Darstellung eine Vereinfachung der Rechnung; denn statt der komplizierten Rechenoperation mit hyperkomplexen Einheiten (z. B. Division) rechnet man bequem und in bekannter Weise mit komplexen Zahlen und mit einer hyperkomplexen Nebeneinheit, deren Quadrat Null ist, die sich also wie eine kleine Größe verhält.[1] Dieser Vorteil zeigt sich vor allem, wenn wir eine Funktion einer hyperkomplexen Veränderlichen betrachten. Die *Levi-Civita*sche Darstellung der hyperkomplexen Zahl läßt dabei wichtige Verallgemeinerungen zu. $\Phi(z)$ sei im Gebiet G, welches den Nullpunkt enthalten soll, regulär und im Nullpunkt selbsteventuell auch singulär; dann läßt sie sich auf eine und nur eine Weise in eine *Laurent* reiheentwickeln:

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\,z^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\,(\alpha + \omega\,\beta)^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\left(\alpha^\nu + \omega\,\beta\,\nu\,\alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\,(\omega\,\beta)^2 + \cdots\right)$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\,\alpha^\nu + \omega\,\beta \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\,\nu\,\alpha^{\nu-1} = \Phi(\alpha) + \omega\,\beta\,\Phi'(\alpha)\,.$$

Diese Zerlegungsformel besagt: Jede analytische Funktion $\Phi(z)$ der hyperkomplexen Veränderlichen $z = x + j\,y + j^2\,u + j^3\,v = \alpha + \omega\,\beta$ läßt sich zerlegen in

$$\Phi(z) = \Phi(\alpha) + \omega\,\beta\,\Phi'(\alpha)\,. \tag{26}$$

Dabei bedeutet $\Phi(\alpha)$ dieselbe Funktion Φ, jedoch mit der komplexen Veränderlichen

$$\alpha = (x - u) + i\,(y - v) \tag{27}$$

als Argument, ω die hyperkomplexe Nebeneinheit $1 + j^2$ und β die komplexe Zahl

$$\beta = u + i\,\frac{3\,v - y}{2}\,. \tag{28}$$

Ebenso beweist man durch Reihenentwicklung: Die Ableitung der analytischen Funktion $\Phi(z) = \Phi(\alpha) + \omega\,\beta\,\Phi'(\alpha)$ ist gegeben durch

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{dx} + \omega\,\beta\,\frac{d^2\Phi}{dx^2}\,. \tag{29}$$

Das unbestimmte Integral von $\Phi(z)$ lautet

$$\int \Phi(z)\,dz = \int \Phi(\alpha)\,d\alpha + \omega\,\beta\,\Phi(\alpha) + C\,. \tag{30}$$

Man kann aus zwei komplexen Funktionen $\Phi(\alpha)$ und $\Psi(\alpha)$ die allgemeinste hyperkomplexe Funktion

$$\Phi(z) + \omega\,\Psi(z) \tag{31}$$

[1] Häufig gebraucht werden

$$i\,\omega = j\,\omega = j + j^3 \qquad \text{und} \qquad i\,j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,j^2 = -1 + \frac{\omega}{2}\,.$$

erzeugen. Der Beweis erfolgt durch Zerlegung in die Elemente, welche die Form der allgemeinsten Bipotentialfunktion haben. Die in diesem Abschnitt abgeleiteten Formeln ergeben den Zusammenhang zwischen den Funktionen einer hyperkomplexen Veränderlichen und den gewöhnlichen komplexen Funktionen.

4. Polynome zur Lösung verschiedener Belastungsfälle des geraden Balken. Bei der Anwendung der in Ziff. 2 aufgestellten hyperkomplexen Spannungsfunktion geht man zunächst von einfachen Funktionen aus und sieht nach, welcher Spannungszustand von ihnen dargestellt wird. Dabei erhält man das einfache Ergebnis, daß die bekannten Lösungen[1] für Belastungsfälle des geraden Balkens durch Polynome dargestellt werden. C bedeutet jeweils eine hyperkomplexe Konstante, welche aus den Randbedingungen bestimmt wird.

Reiner Zug: $$\Phi = C z^2, \tag{32}$$

reine Biegung: $$\Phi = C z^3, \tag{33}$$

Last am eingespannten Balken: $$\Phi = \sum_{\lambda=2}^{4} C_\lambda z^\lambda, \tag{34}$$

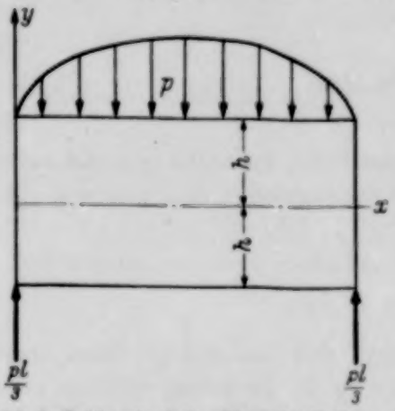


Abb. 2. Beiderseits frei aufliegender Balken mit parabelförmiger Lastverteilung.

beiderseits frei aufliegender, gleichmäßig belasteter Balken:

$$\Phi = \sum_{\lambda=2}^{5} C_\lambda z^\lambda, \tag{35}$$

beiderseits frei aufliegender Balken mit Dreiecksbelastung:

$$\Phi = \sum_{\lambda=2}^{6} C_\lambda z^\lambda, \tag{36}$$

beiderseits frei aufliegender Balken mit parabelförmiger Lastverteilung:

$$\left.\begin{aligned} p_y &= \frac{4p}{l^2} x\,(x-l), \\ \Phi &= \sum_{\lambda=2}^{7} C_\lambda z^\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Nachdem der letzte Fall bisher noch nicht gelöst wurde, soll er ausführlich beschrieben werden.

Wir stellen zunächst die Randbedingungen für Φ auf. Den Nullpunkt der Randkurve legen wir an die Stelle $x = 0$, $y = -h$ und durchlaufen von hier aus dem Rand im positiven Sinne. Die erste Teilstrecke ist lastfrei, demnach gilt[2]:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{z=x-jh} &= \dots + j^3 0 \\ \Phi(x - jh) &= 0 + j \dots \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq l)\ (y = -h); \tag{38, 39}$$

es folgt die Gerade $x = l$; $-h \leqq y \leqq h$.

Bekanntlich haben wir keine strenge Lösung in dem Sinne zu erwarten, daß die Normalspannungen für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden, sondern nur eine Lösung im Sinne des *de Saint-Venant*schen Prinzipes. Danach ergeben die Normalspannungen keine resultierende Normalkraft und kein resultierendes Moment; das Integral über die Schubspannungsverteilung wird dabei gleich der Auflagekraft.

Das heißt nun aber, daß wir längs der Geraden nichts vorschreiben, sondern nur an deren Endpunkt $x = l$, $y = h$ die für das Fortschreiten in mathematischem Umlauf erforderlichen Konstanten errechnen müssen.

Am belasteten Rand lauten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{z=x+jh} &= \dots + j^3 \cdot 0 \\ \Phi(x + jh) &= \frac{2p}{3l^2}\left(\frac{x^4}{2} - l x^3\right) + \frac{pl}{3} x + j \dots \end{aligned}\right\} \quad (y = h)\ (0 \leqq x \leqq l). \tag{40, 41}$$

Für das letzte Stück des Randes $x = 0$, $h \leqq y \leqq -h$ brauchen wir nichts vorzuschreiben.

Den Ansatz (37) für Φ müssen wir noch durch eine lineare Funktion in z und eine Konstante ergänzen, da wir die Konstanten in den Randbedingungen des lastfreien Randes gleich Null gesetzt haben:

$$\Phi = \sum_{\lambda=0}^{7} C_\lambda z^\lambda, \tag{42}$$

[1] *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 3, München 1947.

[2] Siehe (19) und (21) und beachte den Faktor j auf der linken Seite von (19).

wobei die C_λ von der hyperkomplexen Form

$$C_\lambda = C_{\lambda 1} + j\,C_{\lambda 2} + j^2\,C_{\lambda 3} + j^3\,C_{\lambda 4} \tag{43}$$

sind.

Wir haben also zunächst die erschreckende Zahl von $8 \cdot 4 = 32$ Konstanten. Nun kann man aber

$$C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{72} = C_{73} = C_{62} = 0 \tag{44}$$

setzen, da sie zum ersten Element von Φ keinen Beitrag liefern. Weiter überlegt man sich, daß das erste Element von Φ keine höhere Potenz in x als die vierte enthalten darf, da auch in den Randbedingungen für Φ keine höhere vorkommt. Zufolge dieser Bedingung erhält man

$$C_{31} = C_{21} = C_{24} = C_{11} = C_{13} = C_{14} = 0\,. \tag{45}$$

Somit haben wir die Zahl der Konstanten auf 20 reduziert. Wir zählen jetzt die Anzahl der aus den Randbedingungen folgenden Gleichungen ab: Schreiben wir mit unserem Ansatz die Gleichung (41) an und führen von x^4 bis x^0 einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man 5 Gleichungen. Ebenso verfährt man mit Gleichung (38), (39) und (40); das ergibt zusammen 20 Gleichungen. Die Auflösung dieser 20 Gleichungen läßt sich nun in endlicher Zeit bewältigen, und man erhält die hyperkomplexe Spannungsfunktion

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{P}{h^3 l^2}\Big\{&\frac{j}{420}z^7 - \frac{j\,l}{120}z^6 - \left(j\,\frac{2\,h^2}{25} + j^3\,\frac{h^2}{20}\right)z^5 + \left[\frac{h^3}{6} + j\left(\frac{l^3}{48} + \frac{h^2\,l}{5}\right) + j^3\,\frac{h^2\,l}{8}\right]z^4 \\ &- \left(\frac{h^3\,l}{3} + j\,\frac{227\,h^4}{2100} + j^3\,\frac{h^4}{30}\right)z^3 - \left[j^2\,\frac{h^5}{3} + j^3\left(\frac{l^3\,h^2}{8} - \frac{h^4\,l}{20}\right)\right]z^2\Big\}\,.\end{aligned} \tag{46}$$

Die hyperkomplexe Spannung errechnet sich zu

$$\begin{aligned}(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{P}{h^3 l^2}\Big\{&\frac{j}{10}z^5 - \frac{j\,l}{4}z^4 - \left(j\,\frac{8\,h^2}{5} + j^3\,h^2\right)z^3 + \left[2\,h^3 + j\left(\frac{l^3}{4} + \frac{12\,h^2\,l}{5}\right) + j^3\,\frac{3\,h^2\,l}{2}\right]z^2 \\ &- \left(2\,h^3\,l + j\,\frac{227\,h^4}{250} + j^3\,\frac{h^4}{5}\right)z - j^2\,\frac{2\,h^5}{3} + j^3\left(\frac{l^3\,h^2}{4} - \frac{h^4\,l}{10}\right)\Big\}\,.\end{aligned} \tag{47}$$

Durch Zerlegen in ihre vier Elemente erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{P}{h^3 l^2}\left[\frac{-3}{10}y^5 + 2\,x^2 y^3 - 2\,l\,x\,y^3 - \frac{h^2}{5}y^3 - 2\,h^3 y^2 - \frac{1}{2}x^4 y + l\,x^3 y - \frac{6\,h^2}{5}x^3 y\right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{l^3}{2} - \frac{6\,l\,h^2}{5}\right)x\,y + \frac{87\,h^4}{350}y + \frac{2\,h^5}{3}\right], \\
\sigma_y &= \frac{P}{h^3 l^2}\left[\frac{1}{5}y^5 - x^2 y^3 + l\,x\,y^3 - \frac{2\,h^2}{5}y^3 + 3\,h^2 x^2 y\right. \\
&\qquad \left. - 3\,h^2\,l\,x\,y + \frac{h^4}{5}y + 2\,h^3 x^2 - 2\,h^3\,l\,x\right], \\
\tau &= \frac{-P}{h^3 l^2}\left[x\,y^4 - \frac{l}{2}y^4 - x^3 y^2 + \frac{3\,l}{2}x^2 y^2 - \frac{6\,h^2}{5}x\,y^2 - \left(\frac{l^3}{4} - \frac{3\,l\,h^2}{5}\right)y^2 + h^2 x^3\right. \\
&\qquad \left. - \frac{3\,h^2\,l}{2}x^2 + \frac{h^4}{5}x + \left(\frac{l^3\,h^2}{4} - \frac{h^4\,l}{10}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die *Airy*sche Spannungsfunktion an:

$$\begin{aligned}F = \frac{P}{h^3 l^2}\Big[&-\frac{1}{140}y^7 + \frac{1}{10}x^2 y^5 - \frac{l}{10}x\,y^5 - \frac{h^2}{100}y^5 - \frac{h^3}{6}y^4 - \frac{1}{12}x^4 y^3 + \frac{l}{6}x^3 y^3 - \frac{h^2}{5}x^2 y^3 \\ &- \left(\frac{l^3}{12} - \frac{l\,h^2}{5}\right)x\,y^3 + \frac{29\,h^4}{700}y^3 + \frac{h^5}{3}y^2 + \frac{h^2}{4}x^4 y - \frac{h^2\,l}{2}x^3 y + \frac{h^4}{10}x^2 y \\ &+ \left(\frac{l^3\,h^2}{4} - \frac{h^4\,l}{10}\right)x\,y + \frac{h^3}{6}x^4 - \frac{h^3\,l}{3}x^3\Big]\,.\end{aligned} \tag{49}$$

5. Flamants Lösung für die unendliche Halbebene, deren Rand durch eine Einzelkraft belastet ist. Zu Anfang müssen wir darlegen, was wir unter einer Einzelkraft verstehen wollen, da in unseren bisherigen Betrachtungen über die Randbedingungen dieser Begriff noch nicht aufgetreten ist. Dabei knüpfen wir bei (15) an und stellen uns zum Beispiel eine konstante Normalbelastung der Intensität p längs der Strecke von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ vor. Zur Einzellast kommen wir durch den Grenzübergang $p_y \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ derart, daß $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_y\,dx$ endlich bleibt und gleich dem Betrag der Einzelkraft P wird. In den Randbedingungen (19) und (21) stellen dann P_x und P_y keine Abkürzungen für Funktionen längs des Randes mehr dar, sondern sind direkt die Beträge der Komponenten der Einzelkraft, wenn wir die Konstanten C_1 und C_2 aus (15) gleich Null gesetzt haben.

Nach dieser Vorbemerkung können wir die Randbedingungen formulieren:

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^{x}_{-\infty} = \cdots - j^3\, 0\,, \qquad [\Phi]^{x}_{-\infty} = 0 + j \ldots \qquad (-\infty < x < 0)\,, \tag{50}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^{x}_{-\infty} = \cdots - j^3\, Q\,, \qquad [\Phi]^{x}_{-\infty} = -\,P\,x + j \ldots \qquad (0 \leqq x < \infty)\,. \tag{51}$$

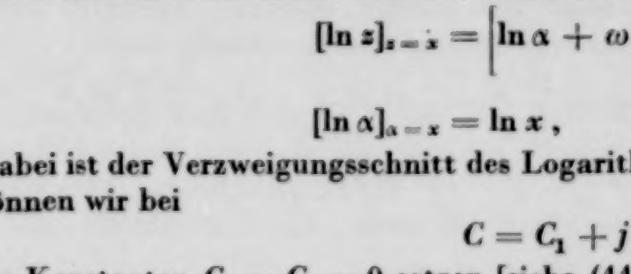


Abb. 3. Grenzübergang zur Einzellast.

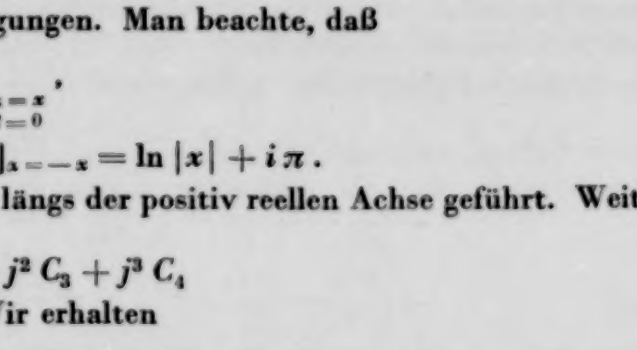


Abb. 4. Die unendliche Halbebene mit Einzellast.

Zum Aufsuchen der Lösung gehen wir zweckmäßig von der zweiten Ableitung der Funktion Φ, also der hyperkomplexen Spannung (σ) aus. Zufolge des bei der Definition der Einzellast gemachten Grenzüberganges wissen wir, daß die Spannungen im Nullpunkt unendlich werden. Wir denken und (σ) in eine *Laurent*-Reihe um den Nullpunkt entwickelt:

$$(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\, z^\nu\,. \tag{52}$$

Da die Spannungen im Unendlichen verschwinden müssen, fallen alle Glieder mit positivem Exponenten fort und es bleibt

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = (\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{-\nu}\,\frac{1}{z^\nu}\,. \tag{53}$$

Die Reihe konvergiert außerhalb von $z = 0$ gleichmäßig, wir dürfen also gliedweise integrieren und erhalten

$$\frac{d\Phi}{dz} = a_{-1}\ln z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{-\nu}\,\frac{1}{(1-\nu)\,z^{\nu-1}} + C\,, \tag{54}$$

$$\Phi = a_{-1}\,z\,(\ln z - 1) + a_{-2}\ln z + \sum_{\nu=3}^{\infty} a_{-\nu}\,\frac{1}{(1-\nu)(2-\nu)\,z^{\nu-2}} + C\,z + D\,. \tag{55}$$

Die Lösung folgt nun unmittelbar aus der Tatsache, daß die Spannungsfunktion Φ am Rande stetig ist. Sie muß daher im Nullpunkt existieren und nimmt dort den Wert Null an. Demnach müssen alle $a_{-\nu}$ mit $\nu \geqq 2$ und die Konstante D verschwinden. Hier sehen wir die Bedeutung der hyperkomplexen Spannungsfunktion für die Behandlung von Aufgaben mit belasteten Rändern. Wir erhalten somit

$$\Phi = a_{-1}\,z\,(\ln z - 1) + C\,z\,, \qquad \frac{d\Phi}{dz} = a_{-1}\ln z + C\,. \tag{56}$$

Die Konstanten bestimmt man aus den Randbedingungen. Man beachte, daß

$$[\ln z]_{z=x} = \left[\ln\alpha + \omega\beta\,\frac{1}{\alpha}\right]_{\substack{\alpha=x\\ \beta=0}},$$

$$[\ln\alpha]_{\alpha=x} = \ln x\,, \qquad [\ln\alpha]_{\alpha=-x} = \ln|x| + i\,\pi\,.$$

Dabei ist der Verzweigungsschnitt des Logarithmus längs der positiv reellen Achse geführt. Weiter können wir bei

$$C = C_1 + j\,C_2 + j^2\,C_3 + j^3\,C_4$$

die Konstanten $C_2 = C_3 = 0$ setzen [siehe (44)]. Wir erhalten

$$a_{-1} = \frac{2}{\pi}(-j\,P + j^2\,Q)\,, \qquad C = -\,(P + j^3\,Q)\,.$$

Die in z linearen Glieder, welche durch das Nullsetzen der Konstanten auf der lastfreien, negativ reellen Achse hereinkommen, können, da sie für die Spannungen ohne Belang sind, auch wieder weggelassen werden. Die hyperkomplexe Spannungsfunktion lautet dann

$$\Phi = \frac{2}{\pi}(-j\,P + j^2\,Q)\,z\ln z \tag{57}$$

und damit die hyperkomplexe Spannung

$$(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{2}{\pi}(-j\,P + j^2\,Q)\,\frac{1}{z}\,. \tag{58}$$

Durch Anwendung der Zerlegungsformel erhält man leicht die bekannte *Airy*sche Spannungsfunktion und die reellen Spannungskomponenten

$$F = \left(\frac{P}{\pi}x - \frac{Q}{\pi}y\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}. \tag{59}$$

Während sonst in der Literatur[1] üblicherweise die *Airy*sche Spannungsfunktion als gegeben an die Spitze gestellt wird und daraus die Spannungen hergeleitet werden, wird hier ein einfacher Weg aufgezeigt, wie man diese selbst findet. Dabei wird lediglich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die hyperkomplexe Spannungsfunktion eine im ganzen Bereich reguläre Funktion ist.

6. Einführung krummliniger Koordinaten in die Spannungsfunktion und Zerlegung des Spannungstensors in Hauptspannungen und krummlinige Komponenten. Bei den bisherigen Betrachtungen über die hyperkomplexe Spannungsfunktion $\Phi(z)$ war stets $z = x + j\,y$, so daß auch die *Airy*sche Funktion F als Funktion von x, y erschien. Es ist aber auch erwünscht, F als Funktion krummliniger Koordinaten ξ, η zu betrachten. Man könnte natürlich einfach

$$x = g(\xi, \eta), \qquad y = h(\xi, \eta) \qquad \text{mit} \qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0$$

in $F(x, y)$ einsetzen und hätte dann $F(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \equiv F^*(\xi, \eta)$.

Für den am meisten interessierenden Fall orthogonaler, isometrischer Koordinaten ermöglicht die hyperkomplexe Zerlegungsformel einen praktischeren Weg. Wir gehen zurück auf (26) und (27): Orthogonale isometrische Koordinaten werden durch Betrachtung der konformen Abbildung einer γ-Ebene mit $\gamma = \xi + i\,\eta$ auf die α-Ebene erhalten, bei der die Geraden $\xi =$ konst. und $\eta =$ konst. in der α-Ebene die gewünschten orthogonalen Kurvenscharen ergeben:

$$\alpha = \varphi(\gamma), \qquad x + i\,y = \varphi(\xi + i\,\eta) = u(\xi, \eta) + i\,v(\xi, \eta), \qquad \beta = -\frac{i\,y}{2} = -\frac{i\,v}{2}. \tag{60}$$

Setzt man (60) in $\Phi(z)$ ein, so erhält man

$$\Phi(z) = \Phi(\varphi(\gamma)) - \frac{\omega\,i\,v}{2}\Phi'(\varphi(\gamma)). \tag{61}$$

Schreibt man

$$\Phi(\varphi(\gamma)) \equiv \Psi(\gamma), \tag{62}$$

dann kommt

$$\Phi(z) = \Psi(\gamma) - \frac{\omega\,i\,v}{2\dfrac{d\alpha}{d\gamma}}\frac{d\psi}{d\gamma} = F(u(\xi, \eta),\ v(\xi, \eta)) + j\,\ldots. \tag{63}$$

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß zwischen der Einführung orthogonaler isometrischer Koordinaten durch $\alpha = \varphi(\gamma)$ bei einem komplexen Potential und bei einem hyperkomplexen Bipotential ein wesentlicher Unterschied besteht. Betrachtet man nämlich $\Phi(\alpha)$, so kann man dafür schreiben

$$\Phi(\alpha) = \Phi(x + i\,y) = \Phi(\varphi(\gamma)) = \Psi(\gamma) = \Psi(\xi + i\,\eta);$$

das heißt, durch Einführung von $\alpha = \varphi(\gamma)$ in die analytische Funktion $\Phi(\alpha)$ entsteht wieder eine analytische Funktion $\Psi(\gamma) = \Psi(\xi + i\,\eta)$. Dagegen läßt sich die aus $\Phi(z) = \Phi(x + j\,y)$ durch Einführung von $\alpha = \varphi(\gamma)$ entstehende Funktion nicht als Funktion von $\xi + j\,\eta$ schreiben; sie ist also keine im hyperkomplexen Sinne analytische Funktion von ξ, η.

Der hyperkomplexe Spannungstensor hat die Komponenten

$$(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \sigma_y + j\,b - j^2\,\sigma_x + j^3\,\tau_{xy}. \tag{13}$$

Wir betrachten im folgenden den Ausdruck $(1 + \omega/2)\,(\sigma)$ und können ihn wie jede hyperkomplexe Zahl in zwei komplexe Zahlen und die Nebeneinheit ω zerlegen:

$$\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)(\sigma) = (\sigma_y + \sigma_x) + i\,(b - \tau_{xy}) + \omega\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\,\tau_{xy}\right). \tag{64}$$

Der Realteil der ersten komplexen Zahl ist die Spannungssumme, für die wir wegen der Invarianz der Tensorspur auch schreiben können

$$\sigma_y + \sigma_x = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{65}$$

Die zweite, mit ω verknüpfte, komplexe Zahl schreiben wir, wie folgt:

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\,\tau_{xy} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}\,e^{i\operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}}. \tag{66}$$

Der Betrag gibt gerade die Hauptschubspannung an:

$$\tau_H = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\,\tau_{xy}^2},$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 132.

und der Winkel die Richtung der Hauptspannungen mit der x-Achse

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

Wir können also zusammenfassen:

$$\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)(\sigma) = (\sigma_1 + \sigma_2) + i \cdots + \omega \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} e^{i\,2\varphi_{1,2}}. \tag{67}$$

Die Transformationsgleichungen der Spannungen

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\Theta + \tau_{xy} \sin 2\Theta,$$

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\Theta - \tau_{xy} \sin 2\Theta,$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\Theta + \tau_{xy} \cos 2\Theta$$

lassen sich zusammenfassen zu

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_y + \sigma_x, \tag{68}$$

$$\frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\Theta - \tau_{xy} \sin 2\Theta + i\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\Theta + \tau_{xy} \cos 2\Theta\right)$$

$$= \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy}\right) e^{2i\Theta}. \tag{69}$$

Es seien nun krummlinige isometrische Koordinaten wie in (60) gegeben, dann gilt

$$\varphi'(\gamma) = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i\frac{\partial y}{\partial \xi} = |\varphi'(\gamma)| \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} + i\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}} = |\varphi'(\gamma)| (\cos\Theta + i \sin\Theta).$$

Wir haben somit die Beziehung

$$e^{2i\Theta} = \frac{\varphi'(\gamma)^2}{|\varphi'(\gamma)|^2}. \tag{70}$$

Multipliziert man die Gleichung (64) mit (70), so erhält man

$$\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)(\sigma) \frac{\varphi'(\gamma)^2}{|\varphi'(\gamma)|^2} = \cdots + \omega\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy}\right) e^{2i\Theta} = \cdots \omega\left(\frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta}\right).$$

Zusammengefaßt gilt

$$(\sigma) = \sigma_\xi + \sigma_\eta + i \cdots + \omega \cdots \qquad \left(1 + \frac{\omega}{2}\right) \frac{\varphi'(\gamma)^2}{|\varphi'(\gamma)|^2} (\sigma) = \cdots + \omega\left(\frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta}\right). \tag{71}$$

Mit Hilfe von Gleichung (71) ist nun der Übergang auf krummlinige Tensorkomponenten leicht möglich, wobei noch beliebig ist, ob die krummlinigen Komponenten Funktionen von x, y oder nach Gleichung (63), die natürlich nicht nur für die hyperkomplexe Spannungsfunktion, sondern für jede hyperkomplexe Funktion gilt, Funktionen der krummlinigen Koordinaten ξ, η sind.

7. Zusammenfassung. Wir gehen von der *Sobrero*schen Theorie der Beschreibung des ebenen Spannungszustandes mittels hyperkomplexer Funktionen aus. Während *Sobrero* sich auf die Anwendungsfälle beschränkt, bei denen Kräfte nur im Innern des Materials angreifen und die Ränder durchweg lastfrei sind, erweitern wir diese Theorie durch Einführung der hyperkomplexen Spannungsfunktion (12), (13) und behandeln damit auch belastete Ränder. Die hyperkomplexe Spannungsfunktion hebt die von den Belastungen herrührenden Unstetigkeiten am Rande auf und stellt somit die Gültigkeit des *Cauchy*schen Integralsatzes im ganzen Bereich wieder her. Ferner ist für das praktische Rechnen mit hyperkomplexen Funktionen die Zerlegungsformel (26), (27) und (28) von Bedeutung. Sie deckt den Zusammenhang der hyperkomplexen mit den komplexen Funktionen auf. In den Anwendungen wird gezeigt, daß man die üblichen Belastungsfälle des geraden Balken mit Hilfe von Polynomen lösen kann: (32) bis (37). Dabei ist es möglich, weitere bis jetzt unbekannte Fälle in das aufgestellte Schema einzuordnen und zu lösen. In dem Falle des Balkens mit parabelförmiger Belastung ist die Behandlung bis zu Ende durchgeführt: (49). Für die unendliche Halbebene mit Einzellast wird eine Ableitung angegeben, welche nur die Stetigkeit der Spannungsfunktion und das Verschwinden der Spannungen im Unendlichen benutzt: (57). Die Zerlegungsformel für die hyperkomplexe Funktion ermöglicht in einfacher Weise die Einführung orthogonaler, isometrischer Koordinaten in die Spannungsfunktion (63) und die Zerlegung in krummlinige Tensorkomponenten: (71).

(Eingegangen am 21. Juli 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Engl*, Karlsruhe, Germersheimer Str. 20.

Soeben erschien:

Aerodynamik des Flugzeuges

Von Dr. phil. **H. Schlichting**, o. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig, Direktor der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen und Leiter des Institutes für Aerodynamik der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt Braunschweig

und Dr.-Ing. **E. Truckenbrodt**, o. Professor für Technische Mechanik und Strömungsmechanik an der Technischen Hochschule München

Erster Band: **Grundlagen aus der Strömungsmechanik**

Aerodynamik des Tragflügels (Teil I)

Mit 260 Abbildungen. XV, 455 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 52,50

Inhaltsübersicht: Teil A: **Grundlagen aus der Strömungsmechanik: Einführung und physikalische Eigenschaften der Atmosphäre:** Aufgaben der Flugzeug-Aerodynamik. Physikalische Eigenschaften der Luft. Ähnlichkeitsgesetze der Strömungen. Literatur. — **Inkompressible reibungslose Strömungen. (Hydrodynamik):** Kinematik der Flüssigkeitsbewegungen. Eindimensionale Strömungen (Stromfadentheorie). Zwei- und dreidimensionale Strömungen. Wirbelbewegung. Berechnung ebener Potentialströmungen mit Hilfe komplexer Funktionen. Der Impulssatz. Literatur. — **Kompressible, reibungslose Strömungen (Gasdynamik):** Grundbegriffe. Eindimensionale Strömungen (Stromfadentheorie). Zweidimensionale Strömungen. Ebene Unterschallströmungen. Ebene Überschallströmungen. Ebene transsonische Strömungen. Literatur. — **Strömungen mit Reibung (Grenzschicht-Theorie):** Grundzüge der Strömung mit Reibung. Grundzüge der Grenzschicht-Theorie. Die Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeit (Navier-Stokessche Gleichungen). Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. Grenzschichtbeeinflussung. Einiges über turbulente Strömungen. Der turbulente Reibungswiderstand der längsangeströmten ebenen Platte. Berechnung der Grenzschicht mit Druckabfall und Druckanstieg. Grenzschichten bei kompressibler Strömung. Der Umschlag laminarturbulent. Literatur. — Teil B: **Aerodynamik des Tragflügels: Einführung in die Aerodynamik des Tragflügels:** Geometrie des Tragflügels. Kräfte und Momente am Tragflügel. Zusammenhang zwischen den Luftkräften und den Bewegungsformen des Tragflügels. Literatur. — **Der Tragflügel unendlicher Spannweite bei inkompressibler Strömung (Profiltheorie):** Grundlagen der Theorie des Auftriebes. Profiltheorie nach der konformen Abbildung. Profiltheorie nach der Singularitätenmethode. Einfluß der Reibung auf die Profileigenschaften. — **Literatur.** — **Namenverzeichnis.** — **Sachverzeichnis.**

In Vorbereitung:

Zweiter Band: **Aerodynamik des Tragflügels (Teil II)**

Aerodynamik des Rumpfes und der Leitwerke

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

NUMERISCHE MATHEMATIK

UNTER MITWIRKUNG VON

F. L. BAUER, MAINZ · **L. BIERMANN**, MÜNCHEN · **L. COLLATZ**, HAMBURG
G. DARMOIS, PARIS · **G. E. FORSYTHE**, PALO ALTO · **A. GHIZZETTI**, ROM
W. GIVENS, DETROIT · **R. INZINGER**, WIEN · **N. J. LEHMANN**, DRESDEN
E. J. NYSTRÖM, HELSINKI · **H. PILOTY**, MÜNCHEN · **R. D. RICHTMYER**, NEW YORK
A. VAN WIJNGAARDEN, AMSTERDAM · **J. H. WILKINSON**, TEDDINGTON

HERAUSGEGEBEN VON

R. SAUER · **E. STIEFEL** · **J. TODD** · **A. WALTHER**
MÜNCHEN ZÜRICH PASADENA DARMSTADT

Die Zeitschrift „Numerische Mathematik" veröffentlicht auf breiter internationaler Grundlage Arbeiten, die sich mit allgemeinen Problemen des digitalen Rechnens, mit der Diskussion bestehender und der Entwicklung neuer numerischer Verfahren beschäftigen. Dabei werden die numerischen und programmierungstechnischen Gesichtspunkte des Einsatzes von Rechenautomaten im Vordergrund stehen. Aufsätze aus dem Gebiet der Informationstheorie werden jedoch ebenfalls Aufnahme finden.

Die Zeitschrift erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

1. Band, 1. Heft

Mit 12 Abbildungen. 60 Seiten Gr.-8°. 1959. DM 16,80

Inhaltsübersicht des ersten Heftes: Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen. Von Professor Dr. E. STIEFEL, Zürich. — On certain methods for expanding the characteristic polynomial. By Dr. A. S. HOUSEHOLDER, Oak Ridge/Tenn. (USA), and Professor Dr. F. L. BAUER, Mainz. — Orthogonal polynomials on several variables. By Dr. M. WEISFELD, San Francisco/Cal. (USA). — Report on the Algorithmic Language ALGOL. By the ACM Committee on Programming Languages and the GAMM Comittee on Programming. Edited by Professor Dr. A. J. PERLIS, Pittsburgh/Pa. (USA), and Professor Dr. K. SAMELSON, Mainz.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 1.1 K. B./Z. 040.